Revista da Olimpíada Alagoana de Matemática

Vol. *1*

ROAM #1

Universidade Federal de Alagoas (UFAL)
Instituto de Matemática (IM)

Coordenadores:
Alan Anderson da Silva Pereira
Davi dos Santos Lima
Elaine Cristine de Souza Silva

Editor Responsável:
Alan Anderson da Silva Pereira

Capa:
Francisco Alan Lima da Silva
Rebeca Alves Dantas de Lima e Silva

Redatores:
Francisco Alan Lima da Silva
Hegel Marinho Viana Filho
Jairon Henrique Noia Batista
Jônatas Marinho Santos Júnior
Lucas Hiroshi dos Santos Nakagawa
Rebeca Alves Dantas de Lima e Silva
Samuel Nascimento Figueredo

Revisão:
Alan Anderson da Silva Pereira
Argos de Omena Albuquerque
Cícero Calheiros Filho
Diogo Carlos dos Santos
Francisco Alan Lima da Silva

Conteúdo

1 Competições e Treinamento Olímpico

1.1 Olimpíadas no Brasil

No Brasil existem várias olimpíadas de matemática que estudantes do ensino fundamental, ensino médio e graduação podem participar. Entre elas temos:

- Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM);
- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP);
- Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

As regras para participar das diversas competições de matemática nacionais variam. A OBMEP e a OAM, por exemplo, são abertas para todas as escolas que tenham interesse em participar. Já a OBM, requer que o estudante já tenha se destacado em alguma competição prévia, como a OAM ou a OBMEP.

Os estudantes premiados na OBM são convidados a participar de um treinamento avançado e de testes de seleção para olimpíadas internacionais:

- Olimpíada de Maio;
- Olimpíada do Cone Sul;
- Olimpíada IberoAmericana de Matemática (OIM);
- Olimíada Internacional de Matemática (IMO).

Por essas razões, podemos dizer que a OAM é o início de uma grande jornada olímpica, cujo site pode ser acessado através do link:

`https://sites.google.com/view/olimpiadaalagoanadematematica/`

1.2 Projetos Olímpicos em Alagoas

Os estudantes medalhistas na OBMEP são convidados a participar do Programa de Iniciação Científica da OBMEP (PIC). Esse treinamento acontece aos sábados em polos determinados pela coordenação regional. Além do PIC, existe o Programa Olímpico de Treinamento Intensivo (POTI), no qual qualquer aluno interessado pode se inscrever.

1.3 A Revista da OAM

A Revista da OAM (ROAM) surgiu como uma forma de ajudar os estudantes interessados em participar de olimpíadas de matemática a se prepararem para estas competições. Nela serão publicados os enunciados e soluções dos problemas da OAM do ano anterior e artigos direcionados para o treinamento olímpico.

Material didático de natureza similar à ROAM pode ser encontrado nos sites das olimpíadas nacionais, como da OBMEP e da OBM. A ideia da ROAM é produzir conteúdos que se adequem ao perfil da OAM e incentivar os estudantes a escreverem artigos para a revista. Qualquer pessoa pode submeter um artigo para a revista, o qual será avaliado por uma comissão para posterior publicação.

Os artigos são divididos em níveis análogos aos níveis da OAM e da OBM:

- nível 1: 6º e 7º ano;
- nível 2: 8º e 9º ano;
- nível 3: ensino médio;
- nível U: universitários.

Desejamos utilizar a ROAM como um canal de interação de ex-competidores da OAM com o projeto atual e, assim, resgatarmos as provas antigas da OAM para que novos estudantes possam ter contato com elas.

Como você já pode ter notado, esta é a primeira edição da ROAM. Toda a nossa equipe está muito feliz de ver este projeto concluído. Esperamos contribuir com a formação de muitos estudantes e que os mesmos compartilhem suas ideias nessa revista.

Alan Pereira,
Editor-Chefe.

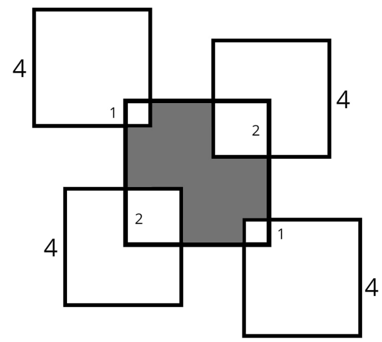
2 Enunciados da OAM Nível 1

PARTE A

Problema 2.1. Calcule a soma dos algarismos de 1010101^2.

Problema 2.2. Na calculadora de Ayá existe uma operação especial $*$. O valor de $a * b$ é o maior valor entre $2a$ e $a + b$. Por exemplo $1 * 3 = 4$, pois $1 + 3 > 2 \times 1$, e $3 * 1 = 6$, pois $2 \times 3 > 3 + 1$. Qual o valor de $(2021 * 2022) * (2023 * 2020)$?

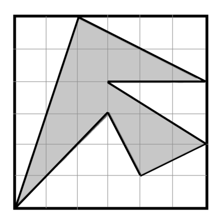
Problema 2.3. Na figura ao lado, o quadrado do meio tem lado 5 e os outros quadrados ao redor têm lado 4. Os quadrados ao redor intersectam o quadrado do meio em quadradinhos cujos lados são 1 e 2, como indicado na figura. Calcule a área da região cinza.



Problema 2.4. Ziço escreveu todos os números de 1 a 121 em uma linha e contou corretamente a quantidade de algarismos 1. Quantos algarismos 1 ele encontrou?

PARTE B

Problema 2.5. Rewis tem uma folha quadriculada na qual o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Ela então desenhou uma obra de arte abstrata e pintou de cinza como mostra a figura abaixo. Qual é a área da região cinza?



Problema 2.6. Créslei escreveu os números de 1 a 10 em uma linha, como abaixo.

$$1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 6 \ \ 7 \ \ 8 \ \ 9 \ \ 10$$

Pode-se colocar os sinais de "+"e -"entre eles. Quantos valores distintos podem ser obtidos dessa forma?

3 Enunciados da OAM Nível 2

PARTE A

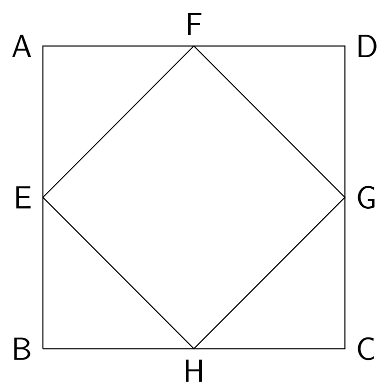
Problema 3.1. Na calculadora de Ayá existe uma operação especial $*$. O valor de $a * b$ é o maior valor entre $2a$ e $a + b$. Por exemplo $1 * 3 = 4$, pois $1 + 3 > 2 \times 1$, e $3 * 1 = 6$, pois $2 \times 3 > 3 + 1$. Qual o valor de $(2021 * 2022) * (2023 * 2020)$?

Problema 3.2. Calcule a soma dos algarismos de 1010101^2.

Problema 3.3. Papa Paulo escreveu a lista de todos os números inteiros positivos com quatro dígitos nos quais cada um dos algarismos 8 e 9 aparecem uma única vez. Por exemplo, 8930 e 9081 foram escritos na lista, mas 2998 e 3926 não estão nela. Quantos números há na lista escrita por Papa Paulo?

Problema 3.4. Edmilson cria uma sequência de quadrados da seguinte forma:

Começamos com o quadrado $ABCD$ de lado 12 cm abaixo. No primeiro passo, escolhemos os pontos médios dos lados deste quadrado, obtendo assim um quadrado menor $EFGH$ tendo por vértices estes pontos médios. No segundo passo, fazemos a mesma coisa com $EFGH$, obtendo um quadrado menor que tem por vértices os pontos médios de $EFGH$, e assim por diante. Em qual passo o quadrado assim obtido passa a ter área menor que 2 cm^2?



PARTE B

Problema 3.5. Em um torneio de Xadrez organizado para acontecer em três dias, cada pessoa joga com todas as outras exatamente três vezes. No primeiro dia, ocorreram vinte e sete partidas, no segundo dia, vinte e oito partidas e no terceiro dia, vinte e nove partidas. Quantas pessoas participaram deste torneio?

Problema 3.6. Determine todos os valores de $n \in \mathbb{Z}$ tais que $2^n + 0^n + 2^n + 1^n$ é um quadrado perfeito.

4 Enunciados da OAM Nível 3

PARTE A

Problema 4.1. Para quantos valores inteiros de $1 \leq a \leq 10$ temos que a equação

$$x^2 + ax + 1 = a$$

tem pelo menos uma solução inteira?

Problema 4.2. Seja $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sabendo que $x + \frac{1}{x} = \phi$ e $x^{16} + \frac{1}{x^{16}} = A + B\phi$, com $A, B \in \mathbb{Z}$ encontre $A - B$.

Problema 4.3. Natiel Carlos tem dupla personalidade, apesar de boas, conflituosas entre si. Natiel escreveu todos os números de 1 a 9999 em um papel, tentando observar algum padrão. Todavia, Carlos apagou todos os números nos quais 8 ou 9 aparecem mais de uma vez. Por exemplo, Carlos não apagou 3893 nem 2908, mas apagou 1988 e 4899. Quantos números Natiel contou após Carlos o trollar?

Problema 4.4. Seja ABC um triângulo isósceles de base $BC = 12$ e $\angle BAC = 120^{\underline{o}}$. Sobre o lado AC marca-se um ponto M e calcula-se

$$y = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2.$$

Qual é o menor valor que y pode assumir?

PARTE B

Problema 4.5. Em um triângulo ABC os lados c, a e b estão, nessa ordem, em progressão aritmética.

a) Calcule

$$\tan \frac{\angle ABC}{2} \tan \frac{\angle ACB}{2}$$

Aqui $\tan \alpha$ é a tangente de α.

b) Mostre que $\angle ABC \leq 60$ e que se $\angle BAC = 60$ então ABC é um triangulo equilátero.

Problema 4.6. Um Dominó é uma peça 1×2 e com essa peça podemos cobrir um tabuleiro de xadrez 8×8. Um triminó é uma peça 1×3.

a) Mostre que não podemos cobrir um tabuleiro de xadrez 8×8 com triminós.

b) Quais são as possíveis casas de um tabuleiro de xadrez 8×8 que podem sobrar ao tentarmos cobri-lo com peças triminó?

5 Enunciados da OAM Nível U

PARTE A

Problema 5.1. Sejam x, y e z números complexos tais que $x+y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^3+y^3+z^3=0$. Determine o valor de xyz.

Problema 5.2. Para qualquer função $f : X \to X$ definida em algum conjunto X se define $f^{(0)}(x) = x$, $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)} = f \circ f(x)$ e indutivamente $f^{(n)}(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}(x)$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2021}$. Denotando

$$I = \int_{-2021}^{2021} f^{(2021)}(x^{2021}) dx$$

Qual é o valor de $e^{I\pi} + 1$?

Problema 5.3. Dado $x > 1$ inteiro, seja $p_+(x)$ o maior fator primo de x. Determine o último dígito de

$$\prod_{\substack{p_+(21) \le p \le p_+(2021) \\ p \text{ primo}}} p^p$$

Problema 5.4. Uma região R_1 é delimitada pelas curvas $x^2 = 4y$, $x^2 = -4y$, $x = 4$ e $x = -4$. Seja V_1 o volume do sólido obtido rotacionando esta região em relação ao eixo y. Considere outra região R_2 definida pelas inequações: $x^2 + y^2 \le 16$, $x^2 + (y-2)^2 \ge 4$ e $x^2 + (y+2)^2 \ge 4$. Seja V_2 o volume do sólido obtido rotacionando esta região em relação ao eixo y. Encontre o valor de $\dfrac{V_1}{V_2}$.

PARTE B

Problema 5.5. Mostre que

$$x^2 = x \sin x + \cos x$$

possui exatamente duas soluções reais.

Problema 5.6. Seja A uma matriz $n \times n$ inversível.

a) Mostre que existe um polinômio q tal que $q(A) = 0$ e cujo termo constante é não nulo.

b) Mostre que existe um polinômio p tal que $A^{-1} = p(A)$.

6 Soluções da OAM Nível 1

6.1 Parte A

Problema 6.1. Calcule a soma dos algarismos de 1010101^2.

Solução: Uma continha rápida e $1010101^2 = 1020304030201$, logo a soma é 16.

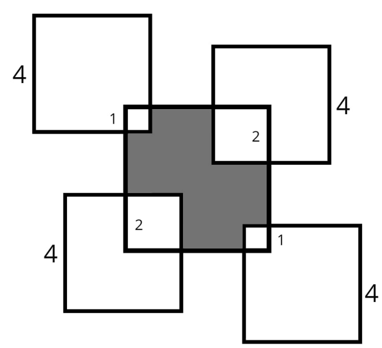
Problema 6.2. Na calculadora de Ayá existe uma operação especial $*$. O valor de $a * b$ é o maior valor entre $2a$ e $a + b$. Por exemplo $1 * 3 = 4$, pois $1 + 3 > 2 \times 1$, e $3 * 1 = 6$, pois $2 \times 3 > 3 + 1$. Qual o valor de $(2021 * 2022) * (2023 * 2020)$?

Solução: Respeitando os parênteses, primeiro vamos calcular $(2021 * 2022)$, para isso veja que $2 \cdot 2021 = 4042 < 4043 = 2021 + 2022$, logo $(2021 * 2022) = 4043$. Agora vamos calcular $(2023 * 2020)$, para tal, perceba que $2 \cdot 2023 = 4046 > 4043 = 2023 + 2020$, logo $(2023 * 2020) = 4046$.

Assim, concluimos que $(2021 * 2022) * (2023 * 2020) = 4043 * 4046$. Para finalizar, observe que $2 \cdot 4043 = 8086 < 8089 = 4043 + 4046$, donde,

$$(2021 * 2022) * (2023 * 2020) = 4043 * 4046 = 8089.$$

Problema 6.3. Na figura ao lado, o quadrado do meio tem lado 5 e os outros quadrados ao redor têm lado 4. Os quadrados ao redor intersectam o quadrado do meio em quadradinhos cujos lados são 1 e 2, como indicado na figura. Calcule a área da região cinza.



Solução: A área total do quadrado central é $5^2 = 25$, os dois quadrados de lado 2 tem área $2^2 = 4$, bem como os de lado um tem área $1^2 = 1$.

Dessa forma, a da região cinza é dado por

$$25 - 2 \times 4 - 2 \times 1 = 15$$

Problema 6.4. Ziço escreveu todos os números de 1 a 121 em uma linha e contou corretamente a quantidade de algarismos 1. Quantos algarismos 1 ele encontrou?

Solução: O algarismo "1" pode aparecer em 3 locais em um número; nas unidades, nas dezenas ou nas centenas. Vamos contar separadamente a quantidade de ocorrências do algarismo 1.

Nas unidades: De 1 a 121, o número "1" aparece 13 vezes nas unidades, uma vez para um dos números, 1, 11, 21, 31,...,121.

Nas dezenas: Nesse caso, temos 20 ocorrências, que são as dos números 10,11,12,...,19 e dos números 110, 111, ..., 119

Nas centenas: aparecem 22, uma vez para cada um dos números, 100, 101,102, ..., 121.

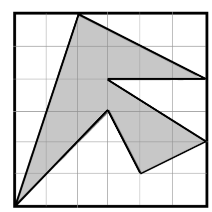
Logo, há

$$13 + 20 + 22 = 54$$

algarismos 1.

6.2 Parte B

Problema 6.5. Rewis tem uma folha quadriculada na qual o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Ela então desenhou uma obra de arte abstrata e pintou de cinza como mostra a figura abaixo. Qual é a área da região cinza?



Solução da Banca: Para calcular a área da região cinza, vamos calcular a área da região branca.

Dividimos a região branca em 7 espaços menores, vamos calcular a área de cada um deles:

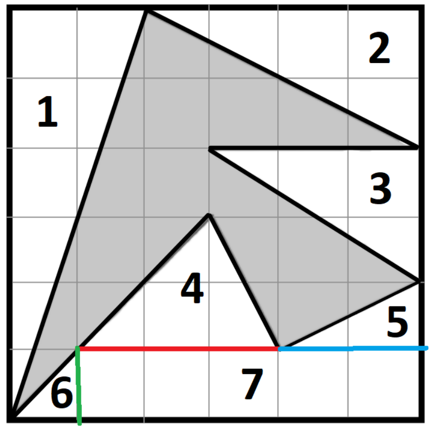
Região 1: um triângulo de base 2 e altura 6, logo tem área 6.
Região 2: um triângulo de base 2 e altura 4, logo tem área 4.
Região 3: um triângulo de base 2 e altura 3, logo tem área 3.
Região 4: um triângulo de base 3 e altura 2, logo tem área 3.
Região 5: um triângulo de base 2 e altura 1, logo tem área 1.
Região 6: um triângulo de base e altura 1, logo tem área 1/2.
Região 7: um retângulo de base 5 e altura 1, logo tem área 5.

Assim, a Região branca tem área

$$6 + 4 + 3 + 3 + 1 + 1/2 + 5 = 22.5.$$

Como a área do quadrado grande é $6^2 = 36$, a área da região cinza é

$$36 - 22.5 = 13.5.$$



Problema 6.6. Créslei escreveu os números de 1 a 10 em uma linha, como abaixo.

$$1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 6 \ \ 7 \ \ 8 \ \ 9 \ \ 10$$

Pode-se colocar os sinais de "+" e "-" entre eles. Quantos valores distintos podem ser obtidos dessa forma?

Solução da Banca: (*Interpretação na qual podemos escolher o sinal do 1*)

Veja que se você pode obter um determinado número n escolhendo os sinais entre os números, você também pode obter $-n$ (basta que você troque todos os sinais).

É possível obter o número $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, se trocarmos o sinal de qualquer número x, obtemos o número $55 - 2x$, e portanto conseguimos construir todos os números ímpares de $55 - 2 \cdot 10 = 35$ a 55.

Podemos escrever $35 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 - 10$, se trocarmos o sinal de um número x entre 1 e 9, obtemos o número $35 - 2x$. Logo conseguimos construir qualquer número ímpar de 35 a $35 - 2 \cdot 9 = 17$.

Podemos escrever $17 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 8 - 9 - 10$, se trocarmos o sinal de um número x entre 1 e 8, obtemos o número $17 - 2x$. Daí conseguimos construir qualquer número ímpar de 17 a $17 - 2 \cdot 8 = 1$.

Assim, sabemos que conseguimos obter todos os números impares de -55 a 55. Logo há 56 possibilidades, pois como veremos abaixo, não podemos obter números ímpares.

É importante fazer a análise contrária. Existe outro número além dos ímpares de -55 a 55 que podem ser obtidos? A resposta é não! Todos os números que podemos obter então entre 55 e -55, pois esses são os casos onde todos os números têm o mesmo sinal, além disso, sempre estamos somando/subtraindo 5 números pares e 5 números impares, e isso sempre é impar.

(*Interpretação na qual não podemos escolher o sinal do 1.*)

O problema se resume a analisar a quantidade de números obtidos se, na análise anterior, começássemos no 2. Isto porque o número 1 fica fixado. Assim o faremos. O leitor fica convidado a fazer o caso da questão somando 1 a cada número apresentado nessa solução como uma possibilidade.

É possível obter o número $2 + \cdots + 8 + 9 + 10 = 54$, se trocarmos o sinal de qualquer número x, obtemos o número $54 - 2x$. Portanto podemos construir todos os números pares de $54 - 2 \cdot 10 = 34$ a $54 - 2 \cdot 2 = 50$.

É possível obter o número $2 + \cdots + 8 + 9 - 10 = 34$, se trocarmos o sinal de qualquer número x de 2 a 9, obtemos o número $34 - 2x$. Assim conseguimos construir todos os números pares de $34 - 2 \cdot 9 = 16$ a $34 - 2 \cdot 2 = 30$.

É possível obter o número $2 + \cdots + 8 - 9 - 10 = 16$, se trocarmos o sinal de qualquer número x de 2 a 8, obtemos o número $16 - 2x$, assim conseguimos construir todos os números pares de $16 - 2 \cdot 8 = 0$ a $34 - 2 \cdot 2 = 30$.

Resta a pergunta, podemos obter os números 52, 32 e 14?

- Não podemos obter 52! Pois o segundo maior número possível é $-2+3+\cdots+10 = 50$.
- Podemos obter 34 da forma

$$34 = -2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 + 10$$

- Podemos obter 14 fazendo

$$14 = -2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 + 9 - 10$$

Assim, conseguimos obter todos os números pares de -54 a 54, salvo 52 e -52, totalizando 53 possibilidades, destacando que abaixo argumentamos o porquê de não podermos obter números ímpares nesse processo.

Novamente importante fazer a análise contrário, existe outro número além dos pares de -54 a 54 que podem ser obtidos? A resposta é não! Todos os números que podemos obter estão entre -54 e 54, pois esses são os casos onde todos os números têm o mesmo sinal, além disso, sempre estamos somando/subtraindo 5 números pares e 4 números ímpares, que sempre resulta em um número par.

7 Soluções da OAM Nível 2

7.1 Parte A

Problema 7.1. Na calculadora de Ayá existe uma operação especial $*$. O valor de $a * b$ é o maior valor entre $2a$ e $a + b$. Por exemplo $1 * 3 = 4$, pois $1 + 3 > 2 \times 1$, e $3 * 1 = 6$, pois $2 \times 3 > 3 + 1$. Qual o valor de $(2021 * 2022) * (2023 * 2020)$?

Solução: Respeitando os parênteses, primeiro vamos calcular $(2021 * 2022)$, para isso veja que $2 \cdot 2021 = 4042 < 4043 = 2021 + 2022$, logo $(2021 * 2022) = 4043$. Agora vamos calcular $(2023 * 2020)$, para tal, perceba que $2 \cdot 2023 = 4046 > 4043 = 2023 + 2020$, logo $(2023 * 2020) = 4046$.

Assim, concluimos que $(2021 * 2022) * (2023 * 2020) = 4043 * 4046$. Para finalizar, observe que $2 \cdot 4043 = 8086 < 8089 = 4043 + 4046$, donde,

$$(2021 * 2022) * (2023 * 2020) = 4043 * 4046 = 8089.$$

Problema 7.2. Calcule a soma dos algarismos de 1010101^2.

Solução: Uma continha rápida e $1010101^2 = 1020304030201$, logo a soma é 16.

Problema 7.3. Papa Paulo escreveu a lista de todos os números inteiros positivos com quatro dígitos nos quais cada um dos algarismos 8 e 9 aparecem uma única vez. Por exemplo, 8930 e 9081 foram escritos na lista, mas 2998 e 3926 não estão nela. Quantos números há na lista escrita por Papa Paulo?

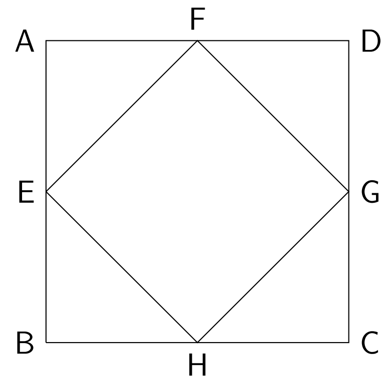
Solução: Primeiro vamos contar os números da lista que começam com 8, fixado o 8 como primeiro digito, vamos determinar a posição do 9, há 3 possibilidades. Depois de fixada a posição do 9, temos 8×8 maneiras de preencher os dois dígitos restantes. Logo, pelo princípio multiplicativo temos $3 \times 8 \times 8$ números na lista que começam com 8, essa quantidade é a mesma para números iniciando em 9. Sendo assim temos $2 \times 3 \times 8 \times 8 = 384$ números nessa lista que começam com 8 ou 9.

Agora vamos contar os demais números. Há 7 possibilidades para o primeiro digito (excluindo os digitos 0,8 e 9), feito isso, vamos determinar a posição dos digitos 8 e 9, o que pode ser feito de 3×2 maneiras e por fim, há 8 maneiras de escolher o último digito (excluindo os digitos 8 e 9). Portanto, neste caso há $7 \times 3 \times 2 \times 8 = 336$ números na lista que nem começam com 8 e nem 9.

Por fim, temos $336 + 384 = 720$ números na lista de Papa Paulo, pelo princípio aditivo.

Problema 7.4. Edmilson cria uma sequência de quadrados da seguinte forma:

Começamos com o quadrado $ABCD$ de lado 12 cm abaixo. No primeiro passo, escolhemos os pontos médios dos lados deste quadrado, obtendo assim um quadrado menor $EFGH$ tendo por vértices estes pontos médios. No segundo passo, fazemos a mesma coisa com $EFGH$, obtendo um quadrado menor que tem por vértices os pontos médios de $EFGH$, e assim por diante. Em qual passo o quadrado assim obtido passa a ter área menor que 2 cm^2?



Solução: Primeiro façamos a seguinte observação: Se em um passo o quadrado tem lado L, no passo seguinte, o quadrado obtido terá lado $\frac{L\sqrt{2}}{2}$. Além disso, a área será menor do que 2 se, e somente se, o lado do quadrado tiver tamanho menor do que $\sqrt{2}$ vamos então buscar em qual passo isso acontece pela primeira vez.

Observe a sequência que se inicia com o tamanho do quadrado original e a sucessão dos comprimetnos dos lados dos quadrados:

$$12,\ 6\sqrt{2},\ 6, 3\sqrt{2},\ 3,\ \frac{3}{2}\sqrt{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

Onde podemos ver que o evento pedido pelo problema acontece no passo 7.

7.2 Parte B

Problema 7.5. Em um torneio de Xadrez organizado para acontecer em três dias, cada pessoa joga com todas as outras exatamente três vezes. No primeiro dia, ocorreram exatamente vinte e sete partidas, no segundo dia, vinte e oito partidas e no terceiro dia, vinte e nove partidas. Quantas pessoas participaram desse torneio?

Solução: (Solução de Mateus Amorim Sibaldo Pergentino Vieira)

Nos três dias, ocorreram exatamente $27 + 28 + 29 = 84$ partidas. Sendo x o número de participantes do torneio, um participante A jogou $3(x-1)$ partidas, um participante B jogou mais $3(x-2)$ (tendo em vista que B já jogou com A) e assim por diante, até que um participante tenha mais $3 \cdot 1$ partidas contabilizadas no total e o participante final não tenha mais. Conclui-se que

$$84 = 3((x-1) + (x-2) + \cdots + 2 + 1) \implies x^2 - x - 56 = 0.$$

A solução deve ser positiva, portanto,

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 224}}{2} = 8$$

é a quantidade de pessoas que participaram do torneio.

Problema 7.6. Determine todos os valores de $n \in \mathbb{Z}$ tais que $2^n + 0^n + 2^n + 1^n$ é um quadrado perfeito.

Solução: (Solução da Banca)

Vamos resolver o problema em três casos: $n = 0$, $n > 0$ e $n < 0$.

Caso 1, $n = 0$: Temos uma indeterminação e portanto não temos um quadrado perfeito.

Caso 2, $n > 0$:

Suponha que $2^n + 0^n + 2^n + 1^n = 2^{n+1} + 1$ seja um quadrado perfeito. Isto é, existe um inteiro m tal que $2^{n+1} + 1 = m^2$. Observe que m é impar pois, caso contrário, o quadrado de um número par seria impar e isto é uma contradição. Usando a Divisão Euclidiana, podemos reescrever a partir de um unico par inteiro $(q, 1)$ o número m, como $m = 2q + 1$. Daí, obtemos

$$2^{n+1} + 1 = m^2 \implies 2^{n+1} + 1 = 4q^2 + 4q + 1 \implies 2^{n+1} = 4q(q + 1).$$

Agora, como 2 é primo, devem existir potências de 2 tais que $2^a = q$ e $2^b = q + 1$. Veja que q ou $q + 1$ deve ser ímpar e potência de 2, mas a única potência de 2 que é ímpar é 1. Daí devemos ter $q = 1$. Substituindo, temos $n = 2$, e $2^n + 0^n + 2^n + 1^n = 9$ que de fato é um quadrado perfeito.

Caso 3, $n < 0$:

Seja $m = -n$. Então $m > 0$ e podemos reescrever $2^n + 1$ da seguinte forma,

$$2^n + 1 = \frac{1}{2^m} + 1.$$

Suponha que existe k inteiro tal que $\frac{1}{2^m} + 1 = k^2$, isso implica que $\frac{1}{2^m}$ é inteiro. Mas isso só é possível se $m = 0$, o que contradiz o fato de que $m > 0$.

Portanto, a única solução é $n = 2$.

8 Soluções da OAM Nível 3

8.1 Parte A

Problema 8.1. Para quantos valores inteiros $1 \leq a \leq 10$ temos que a equação

$$x^2 + ax + 1 = a$$

tem pelo menos uma solução inteira?

Solução. Aplicando a fórmula de resolução de equações do segundo grau à equação $x^2 + ax + 1 - a = 0$, obtemos as possíveis soluções:

$$x_0 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(1-a)}}{2} \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4(1-a)}}{2}.$$

Deste modo, a fim de ter solução inteira, devemos ter $\sqrt{a^2 - 4(1-a)} \in \mathbb{Z}$, isto é, $a^2 - 4(1-a) = b^2$ para algum $b \in \mathbb{Z}$. Note que sempre vale $a^2 - 4(1-a) = (a+2)^2 - 8 < (a+2)^2$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(a+1)^2 < (a+2)^2 - 8 &\iff a^2 + 2a + 1 < a^2 + 4a - 4\\ &\iff 5 < 2a\\ &\iff 6 \leq 2a\\ &\iff 3 \leq a.\end{aligned}$$

Deste modo, para $a \geq 3$, $a^2 + 4a - 4$ está entre dois quadrados perfeitos consecutivos, e portanto ele mesmo não pode ser um quadrado perfeito.

Falta analisar os casos $a = 1$ e $a = 2$. Note que se $a = 1$ então $a^2 + 4a - 4 = 1$, e daí as soluções da equação são $x_0 = 0$ e $x_1 = -1$. Para $a = 2$, $a^2 + 4a - 4 = 8$, que não é quadrado perfeito. Deste modo, apenas para $a = 1$ a equação admite solução inteira.

Problema 8.2. Seja $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sabendo que $x + \frac{1}{x} = \phi$ e $x^{16} + \frac{1}{x^{16}} = A + B\phi$, com $A, B \in \mathbb{Z}$ encontre $A - B$.

Solução. Do produto notável $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ obtemos, para $a = x \neq 0$ e $b = \frac{1}{x}$,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

donde

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

Utilizaremos esta identidade quatro vezes. Ora,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \phi^2 - 2.$$

Fazendo a substituição, temos

$$\phi^2 - 2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aplicando a identidade novamente juntamente ao cálculo anterior,

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Repetindo o argumento,

$$x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Finalmente,

$$x^{16} + \frac{1}{x^{16}} = \left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right)^2 - 2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

isto é,

$$x^{16} + \frac{1}{x^{16}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 0 + (-1)\phi.$$

Então $A = 0, B = 0$ e $A - B = 0 - (-1) = 1$.

Problema 8.3. Natiel Carlos tem dupla personalidade, apesar de boas, conflituosas entre si. Natiel escreveu todos os números de 1 a 9999 em um papel, tentando observar algum padrão. Todavia, Carlos apagou todos os números nos quais 8 ou 9 aparecem mais de uma vez. Por exemplo, Carlos não apagou 3893 nem 2908, mas apagou 1988 e 4899. Quantos números Natiel contou após Carlos o trollar?

Solução. A estratégia de contagem será contar todos os números de 1 até 9999 e retirar os números que aparecem dois oito ou dois nove, por algarismos. Para simplificar a linguagem, chamaremos de *baixo* um número que não aparece dois oito ou dois nove em sua representação decimal. Contaremos por quantidade de algarismos.

- Um algarismo $(1 - 9)$:

  Claramente não aparece nenhum oito ou nove repetidos. Logo, temos 9 números baixos entre 1 e 9.

- Dois algarismos $(10 - 99)$:

  Apenas em 88 e 99 aparecem dois oito ou dois nove. Logo, temos $99-10+1-2 = 88$ números baixos entre 10 e 99.

- Três algarismos $(100 - 999)$:

  Há ao todo $999 - 100 + 1 = 900$ números com três algarismos. Veremos quais apacerem 8 ou 9 pelo menos duas vezes.

  Os que aparecem 8 exatamente duas vezes: caso 8 seja o algarismo das centenas, então o outro 8 aparece ou nas centenas, ou nas dezenas. Em ambos os casos, temos 9 escolhas possíveis para o dígito restante (todos os algarismos menos o oito), o que nos dá 18 escolhas possíveis. Caso não apareça, há 8 possíveis escolhas pro algarismo das centenas (todos menos o zero e o oito). O único número em que o 8 aparece mais de duas vezes é o 888. Logo, temos $18 + 8 + 1 = 27$ números deste tipo.

  O mesmo vale para o 9.

  Desta forma, há $900 - 27 - 27 = 846$ números baixos entre $100 - 999$.

- Quatro algarismos $(1000 - 9999)$: Como no caso anterior, abriremos em casos. Veremos então os números nos quais aparecem o oito

  -Exatamente 4 vezes. Há apenas um número, a saber, 8888.

  -Exatamente 3 vezes. Se não estiver nos milhares, então o número é da forma _888. Temos oito possíveis escolhas para o algarismo dos milhares (todos os algarismos menos o zero e o oito). Se um oito estiver no algarismo dos milhares, então temos três escolhas para alocar os dois oito restantes. Além do mais, temos 9 escolhas possíveis para o algarismo restante (todos os algarismos menos o oito). Desta forma, temos $8 + 3 \times 9 = 35$ números desta forma.

  -Exatamente 2 vezes. Mais uma vez, se 8 não está nos milhares então há três formas possíveis de alocar os algarismos oito nas casas restantes. Temos oito possíveis escolhas para o algarismo dos milhares e nove para o algarismo restante. Caso oito esteja nos milhares então há três formas possíveis e alocar o outro 8 nos algarismos restantes e temos 9 escolhas possíveis para cada dígito restante. Desta forma, há $3 \times 8 \times 9 + 3 \times 9 \times 9 = 216 + 243 = 459$ números desta forma.

  As mesmas contas servem para 9. Contudo, note que contamos com repetição desta vez: de fato, no caso em que aparecem dois oito, também pode aparcer dois nove: por exemplo, 8899. Nos outros casos isto não acontece. Contamos quantos números são desta forma. Ora, há exatamente dois oito e dois nove: então temos uma permutação com repetição, o que nos dá $\frac{4!}{2!2!} = 6$.

  Desta forma, há $9000 - 2 \times (1 + 35 + 459) + 6 = 9000 - 990 + 6 = 8016$ números baixos entre 1000 e 9999.

Finalmente, somando todos os casos, há $9+88+846+8016=8959$ números baixos.

Problema 8.4. Seja ABC um triângulo isósceles de base $BC=12$ e $\angle BAC=120^\circ$. Sobre o lado AC marca-se um ponto M e calcula-se

$$y=\overline{MB}^2+\overline{MC}^2.$$

Qual é o menor valor que y pode assumir?

Solução. Chame de x o comprimento do segmento MC e de z o comprimento de BM. Note que $y=x^2+z^2$.

Agora, calculemos o valor de $AC=l$. Ora, seja N o ponto médio de BC; deste modo, NC mede 6. Como o triângulo é isósceles, o segmento AN é a altura do triângulo e daí o triângulo ANC é retângulo (em N). Além do mais, AN é bissetriz do ângulo $\angle BAC=120^\circ$, e daí $\angle NAC=60^\circ$. Das relações trigonométricas em um triângulo retângulo temos

$$\frac{6}{l}=\sin(60^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}\implies l=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}.$$

Mais uma vez, como o triângulo é isósceles, vale $\angle CBA=\angle ACB$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus, temos $\angle CBA+\angle ACB+\angle BAC=180^\circ\implies\angle CBA+\angle ACB=180^\circ-120^\circ=60^\circ$, donde $\angle CBA=\angle ACB=30^\circ$.

Deste modo, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo BMC com relação ao ângulo $\angle BCA$, segue que

$$z^2=x^2+12^2-2\cdot x\cdot 12\cdot\cos(30^\circ)\implies z^2=x^2-12\sqrt{3}x+144.$$

Somando x^2 a ambos os lados da igualdade, obtemos

$$y=x^2+z^2=2x^2+-12\sqrt{3}x+144.$$

Então y depende apenas de x e é uma função quadrática, com $x\in[0,4\sqrt{3}]$. Como o coeficiente líder é $2>0$, a função atinge um mínimo global em $x=\frac{12\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}\in[0,4\sqrt{3}]$, e então o menor valor que a função pode tomar coincide com o menor que valor que y pode tomar. Fazendo as contas, este menor valor corresponde a

$$y=2(3\sqrt{3})^2-12\sqrt{3}(3\sqrt{3})+144=54-108+144=90.$$

8.2 Parte B

Problema 8.5. Em um triângulo ABC os lados c, a e b estão, nessa ordem, em progressção aritmética.

a) Calcule

$$\tan\frac{\angle ABC}{2}\tan\frac{\angle ACB}{2}$$

Aqui $\tan\alpha$ é a tangente de α.

b) Mostre que $\angle ABC \leq 60$ e que se $\angle BAC = 60$ então ABC é um triangulo equilátero.

Solução:

Solução do item a) (Solução de Victor Umbelino Barbosa)

Por simplicidade, denote $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$ e $\angle BCA = \gamma$. Usando a fórmula de Heron teremos que:

$$\begin{aligned}(ABC) =&\sqrt{\frac{3a}{2}\left[\frac{3a}{2}-(a-r)\right]\left[\frac{3a}{2}-(a+r)\right]\left[\frac{3a}{2}-a\right]}\\ =&\frac{a}{4}\sqrt{3\left(a^2-4r^2\right)}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(ABC) = \frac{(a-r)a\sin\beta}{2} &\implies \frac{(a-r)a\sin\beta}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3\left(a^2-4r^2\right)}\\ &\implies \sin\beta = \frac{\sqrt{3\left(a^2-4r^2\right)}}{2(a-r)}.\end{aligned}$$

Analogamente, $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{3\left(a^2-4r^2\right)}}{2(a+r)}$.

Usando a Lei dos Cossenos teremos que

$$\begin{aligned}(a+r)^2 = a^2+(a-r)^2-2a(a-r)\cos\beta &\implies \cos\beta = \frac{a-4r}{2(a-r)},\\ (a-r)^2 = a^2+(a+r)^2-2a(a+r)\cos\gamma &\implies \cos\gamma = \frac{a+4r}{2(a+r)}.\end{aligned}$$

Lembre agora que se $\tan x = y$, então

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+y^2}}{y}. \tag{1}$$

Agora, veja que $\beta, \gamma < 180^\circ$ o que implica $\dfrac{\beta}{2}, \dfrac{\gamma}{2} < 90^\circ$. Como

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{3(a^2-4r^2)}}{a-4r},$$

pela Equação (1) temos

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+\dfrac{3(a^2-4r^2)}{(a-4r)^2}}}{\dfrac{\sqrt{3(a^2-4r^2)}}{a-4r}}.$$

Assim

$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{-1+\sqrt{\dfrac{4(a-r)^2}{(a-4r)^2}}}{\dfrac{\sqrt{3(a^2-4r^2)}}{a-4r}} = \frac{a+2r}{\sqrt{3(a^2-4r^2)}},$$

Analogamente,

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{a-2r}{\sqrt{3(a^2-4r^2)}}$$

Portanto,

$$\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+2r)(a-2r)}{3(a^2-4r^2)} = \frac{(a^2-4r^2)}{3(a^2-4r^2)} = \frac{1}{3}$$

Solução do item b) (Solução de João Rafael Silva de Azeredo)

Por simplicidade, assuma que $\angle ABC = \beta,\ \angle BAC = \alpha$ e $\angle BCA = \theta$.

Por um lado, observe que como a medida dos lados do triângulo estão em uma progressão aritmética e pela lei dos senos:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta} = \frac{b+c}{2\sin\alpha}.$$

Por outro lado:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta} = \frac{b+c}{\sin\beta+\sin\theta} \implies \sin\alpha = \frac{\sin\beta+\sin\theta}{2}$$

Seja $f(x) = \sin x$, então

$$f'(x) = \cos x \text{ e } f''(x) = -\sin x,$$

o que implica que $f(x)$ é côncava, com $0 < x < \pi$. Pela desigualdade de Jensen, se f é côncava, então

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\theta) \leq 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\theta}{3}\right) \leq 3f(\pi/3)$$

assim
$$\sin\alpha + \cos\beta + \sin\theta \leq 3\sin\pi/3 = 3\sqrt{3}/2.$$

Lembre-se que provamos que
$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta + \sin\theta}{2}$$
substituindo na equação anterior temos $\sin\alpha \leq \sqrt{3}/2$.

Como $0 \leq \alpha \leq 90^o$, visto que do contrário $\beta > 90^o$ que pela desigualdade dos angulos é um absurdo, temos que $0 \leq \alpha \leq 60^o$.

Se $\alpha = 60^o$ então, usando que $\sin\alpha = \dfrac{\sin\beta + \sin\theta}{2}$, temos que $\sin\beta + \sin\theta = \sqrt{3}$. Porém, pela desigualdade de Jensen:
$$\sin\beta + \cos\theta \leq \sqrt{3}$$
como $f''(x)$ é estritamente menor que zero no intervalo, a igualdade só ocorre quando $\beta = \theta$, ou seja, $\alpha = \beta = \theta = 60^o$, logo ABC é equilátero.

Problema 8.6. Um Dominó é uma peça 1×2 e com essa peça podemos cobrir um tabuleiro de xadrez 8×8. Um triminó é uma peça 1×3.

a) Mostre que não podemos cobrir um tabuleiro de xadrez 8×8 com triminós.

b) Quais são as possíveis casas de um tabuleiro de xadrez 8×8 que podem sobrar ao tentarmos cobri-lo com peças triminó?

Solução: (Solução de João Rafael Silva de Azeredo)

a) Veja que o tabuleiro tem 64 casas, supondo que podemos cobrir o tabuleiro com k peças triminós teríamos $64 = 3k$, o que implicaria que $3|64$, que é um absurdo. Portanto é impossível.

b) Podemos colorir o tabuleiro da seguinte forma:

Na primeira Coluna: Pinte da cor A o quadrado da linha 1, na segunda linha pinte da cor B, na terceira linha da coluna pinte da cor C, a proxima linha pinte de A, a próxima de B e assim sucessivamente, até acabarem as linhas.

Na Segunda Coluna: Pinte da cor B o quadrado da linha 1, da cor C o quadrado da linha 2, da cor A o quadrado da linha 3 e da cor B o quadrado da linha 4. Repita o processo para as proximas linhas.

Na Terceira Coluna: pinte o primeiro quadrado da linha 1 da cor C e repita um processo análogo ao das outras colunas.

As próximas colunas serão pintadas de forma semelhante, observando que a proxima coluna iniciará pela cor A e a proxima por B, assim sucessivamente até a ultima coluna.

Veja que uma peça 3×1 sempre cobre uma cor de cada. Contando, no total, tem uma casa na cor B a mais com relação a A e a C. Logo, estas são as únicas possiveis casas que sobram. Porém, se rotacionarmos 90^o graus no sentido horário o tabuleiro colorido pelas cores A, B e C, obtemos novas possíveis casas que já são descartadas como sendo impossíveis de sobrepor. Após as quatro rotações restam apenas 4 prováveis casas impossíveis de serem coloridas.

A primeira casa fica na terceira linha da terceira coluna, a segunda casa fica na quinta coluna da mesma linha, a terceira casa fica na quinta linha da terceira coluna e a última casa na quinta linha da quinta coluna.

9 Soluções da OAM Nível U

PARTE A

Problema 9.1. Sejam x, y e z números complexos tais que $x+y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^3+y^3+z^3=0$. Determine o valor de xyz.

Sol.: Para resolver o problema, observe que

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz)\\ &= x^3+y^3+z^3+3\left(x\left(y^2+z^2\right)+y\left(x^2+z^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)+2xyz\right).\end{aligned}$$

Usando as hipóteses do problema, temos que

$$\begin{aligned}27 &= 0+3\left(x\left(1-x^2\right)+y\left(1-y^2\right)+z\left(1-z^2\right)+2xyz\right)\\ &= 3\left(-\left(x^3+y^3+z^3\right)+(x+y+z)+2xyz\right)\\ &= 3\left(-0+3+2xyz\right).\end{aligned}$$

Portanto $xyz=3$.

Problema 9.2. Para qualquer função $f: X \to X$ em algum conjunto X se define $f^{(0)}(x) = x$, $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x) = f \circ f(x)$ indutivamente $f^{(n)}(x) = f \circ f \circ f \circ \ldots f(x)$, n vezes. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2021}$. Denotando

$$I = \int_{-2021}^{2021} f^{(2021)}(x^{2021})dx$$

Qual o valor de $e^{I\pi}+1$?

Sol:
Observe que $f(-x) = -f(x)$, ou seja, f é ímpar. Além disso, composta de funções ímpares é ímpar. Como x^{2021} é uma função ímpar, segue que $f^{(2021)}\left(x^{2021}\right)$ é ímpar . Agora, lembre que integral de funções ímpares em intervalos simétricos é 0, daí

$$\int_{-2021}^{2021} f^{(2021)}(x^{2021})dx = 0.$$

Portanto, $e^{I\pi}+1=2$

Problema 9.3. Dado $x \in \mathbb{N}$, seja $p_+(x)$ o maior fator primo de x. Determine o último dígito de

$$\prod_{p_+(21)\le p\le p_+(2021)} p^p.$$

Sol.: Inicialmente, observe que $p_+(21) = 7$, $p_+(2021) = 47$. Seja P o valor do produtório, então

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{p_+(21)\leq p\leq p_+(2021)} p^p \\
&= \prod_{7\leq p\leq 47} p^p \\
&= 7^7 11^{11} 13^{13} 17^{17} 19^{19} 23^{23} 29^{29} 31^{31} 37^{37} 41^{41} 43^{43} 47^{47}.
\end{aligned}$$

Como $10k + x \equiv x \pmod{10}$,

$$\begin{aligned}
P &\equiv 7^7 1^{11} 3^{13} 7^{17} 9^{19} 3^{23} 9^{29} 1^{31} 7^{37} 1^{41} 3^{43} 7^{47} \\
&\equiv 3^{79} 7^{108} 9^{48} \pmod{10}.
\end{aligned}$$

Agora, observe que $\phi(10) = 4$ e $(p, 10) = 1$, para todo primo maior que 5. Assim, usando o teorema de Euler para congruências

$$3^{79} 7^{108} 9^{48} \equiv 3^3 7^0 9^0 \equiv 27 \equiv 7 \pmod{10}$$

portanto, o ultimo dígito do produtório é 7.

Problema 9.4. Uma região R_1 é delimitada pelas curvas $x^2 = 4y$, $x^2 = -4y$, $x = 4$ e $x = -4$. Seja V_1 o volume do sólido obtido rotacionando esta região com relação ao eixo y. Considere outra região R_2 definida pelas inequações: $x^2 + y^2 \leq 16$, $x^2 + (y - 2)^2 \geq 4$ e $x^2 + (y + 2)^2 \geq 4$. Seja V_2 o volumme do sólido obtido rotacionando esta região com relação ao eixo y. Encontre o valor de $\frac{V_1}{V_2}$.

Sol.: Observe que a região v_2 é formada por uma esfera maior, de raio 4, menos duas esferas menores, de raio 2. Ou seja,

$$V_2 = \frac{4\pi \cdot 4^3}{3} - 2\frac{4\pi \cdot 2^3}{3} = 64\pi.$$

Ademais, V_1 é duas vezes o volume do sólido que surge ao rotacionarmos o gráfico de $f(y) = 2\sqrt{y}$ com relação ao eixo das ordenadas, pois os gráficos $x^2 = 4y$ e $x^2 = -4y$ são idênticos. Portanto

$$V_1 = 2\pi \cdot \int_0^4 (2\sqrt{y})^2 dy = 4\pi y^2 \Big|_0^4 = 64\pi.$$

Portanto a razão é 1.

PARTE B

Problema 9.5. Mostre que

$$x^2 = x \sin x + \cos x$$

possui exatamente duas soluções reais.

Solução: (Solução de Gabriel Fernando Santos de Oliveira)
Seja
$$f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$$
. Observe que
$$f'(x) = -2x + \sin x - x\cos x - \sin x = x(2 - \cos x).$$

Note que, $2x - x\cos x = x(2 - \cos x)$. Como $2 - \cos x \geq 1$, segue que $2 - \cos x \neq 0$. Daí, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Sabemos que f é contínua e diferenciavel na reta, portanto, pelo teorema de Rolle f só pode ter no máximo duas raizes reais distintas em um intervalo qualquer $[a, b]$. Se existisse uma terceira raiz então existiria $c \neq 0$ tal que $f'(c) = 0$. Absurdo! Logo f tem, no máximo, duas raizes reais.

Agora provaremos que f tem, no mínimo, duas raízes reais. De fato,
$$f(0) = -1 < 0,$$
$$f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0, \text{ e}$$
$$f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0.$$

Logo, pelo teorema de Bolzano (T.V.I) f tem uma raiz no intervalo $(-\pi, 0)$ e outra em $(0, \pi)$. Portanto, $x^2 = x\sin x + \cos x$ tem exatamente duas soluções reais.

Problema 9.6. Seja A uma matriz $n \times n$, inversível

(a) Mostre que existe um polinômio q tal que $q(A) = 0$ e cujo termo constante é não nulo.

Sol.1: (Solução de Samuel Nascimento Figueredo)
Suponha que A^{-1} é o inverso de A. Daí, o polinômio (com coeficientes matriciais) $q(X) = XA^{-1} - I$ tem raiz A.

Sol.2: (Solução de Jonatas Marinho S. Júnior)
Seja $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$. Note que $dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$. Logo, o conjunto
$$\{I_n = \text{identidade em } M_n(\mathbb{R}), A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$$
é L.D pois o conjunto tem $n^2 + 1$ elementos. Além do mais, $A^i \neq 0$, $\forall i \geq 0$ pois como A é inversível
$$A^n = 0 \implies A^{n-1} = 0 \implies \cdots \implies A = 0.$$
Logo, existem $a_0, \ldots, a_{n^2}$ não todos nulos tais que $\sum_{i=0}^{n^2} a^i A^i = 0$.

Então o conjunto $P = \{p(x) \in \mathbb{R}[x];\ p(A) = 0\}$ tem mais do que um elemento. Seja $q(x)$ o polinômio de menor grau em $P - \{0\}$, onde 0 é o polinômio costante igual a 0.

Note que $B = \{\text{grau de } p;\ p \in P\}$ não é vazio e, pelo Princípio da Boa Ordem, B tem um menor elemento.

Denotando $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, pode-se afirmar que $b_0 \neq 0$. Do contrário, $q(x) = xu(x)$, onde $u(x)$ é um polinômio de grau $m-1$, com A sendo raiz.

(b) Mostre que existe um polinômio p, tal que $p(A) = A^{-1}$.

Sol.1: (Solução de Samuel Nascimeto Figueredo)
O polinômio com coeficientes matriciais $p(X) = XA^{-1} - I + A^{-1}$ é tal que $p(A) = A^{-1}$.

Sol.2: (Solução de Jonatas Marinho S. Júnior)
Seja $q(x)$, o polinômio como no item (a). Já que $b_0 \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} q(A) = \sum_{i=0}^{m} b_i A^i = 0 &\implies \sum_{i=0}^{m} b_i A^i = -b_0 \\ &\implies A \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i A^{i-1} = -b_0 \\ &\implies \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{-b_i}{b_0} \right) A^{i-1} = A^{-1}. \end{aligned}$$

Por fim, definindo

$$p(x) := \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{-b_i}{b_0} \right) x^{i-1}$$

fica clara a existência, pois

$$p(A) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{-b_i}{b_0} \right) A^{i-1} = A^{-1}.$$

10 Números Pares e Ímpares (por Rebeca Alves)

10.1 Intuição e contexto

Na escola, aprendemos que o conjunto dos números inteiros é o conjunto dos números naturais positivos e negativos, isto é, ele é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

e junto com ele, aprendemos a realizar uma série de operações. Mas será que essa é a única utilidade para esse conjunto?

O legal dos números inteiros é que podemos escrevê-los de várias formas utilizando as quatro propriedades básicas da matemática: soma, subtração, multiplicação e divisão.

Neste artigo, vamos nos focar em utilizar essas propriedades para escrever matematicamente números pares e ímpares. Então a sua primeira reflexão é:

Você já percebeu que os números pares e ímpares são números inteiros?

Vamos começar a pensar por aí. Na escola, aprendemos que um número inteiro é par quando sua divisão por 2 tem resto 0. Por exemplo:

$$16 \div 2 = 8, \text{ com resto } 0.$$

$$\text{Já } 17 \div 2 = 8, \text{ mas com resto } 1.$$

Logo, 16 é par, mas 17 não é.

Isto nos leva a próxima reflexão: você já notou que se um número inteiro não é par (ou seja, ímpar) quando dividido por 2, seu resto é sempre 1? Se nunca notou, pega um lápis e papel e tenta aí. Qualquer número ímpar é um belo exemplo para essa curiosidade.

Vamos te apresentar uma nova maneira de observar um número inteiro, e para isso, precisamos de alguns passos. Voltando para o exemplo do número 16, sabemos que se o dividirmos por 2, o resultado será 8, e o resto 0. Então podemos escrever

$$16 = 8 \cdot 2.$$

Já o 17, dividindo-o por 2, o resultado também é 8, com resto 1. Daí, podemos escrever

$$17 = 8 \cdot 2 + 1.$$

Antes de você (e de nós mesmos) chegar a conclusões sobre este fato curioso, vamos procurar mais exemplos.

- 2023 dividido por 2 é 1011 com resto 1, então $2023 = 1011 \cdot 2 + 1$;
- 2022 dividido por 2 é 1011 com resto 0, então $2022 = 1011 \cdot 2$;

- 79 dividido por 2 é 39 com resto 1, então $79 = 39 \cdot 2 + 1$;

Então, perceba que esse padrão se repete para quaisquer números inteiros. Além disso, note que em todos os resultados, o 2 sempre aparece multiplicando um número inteiro. Isso não é por acaso. Na época em que te ensinaram divisão na escola, quando te pediram para dividir 16 por 2, diziam para procurar um número que multiplicado por 2, resultaria em 16. E esse número em questão é sempre inteiro, e nesse caso em particular, é o 8.

$$16 = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow 16 \div 2 = 8$$

Por isso, estamos simplesmente te ensinando a escrever a divisão de um número de maneira que você consiga realizar operações e resolver questões de maneira mais eficaz.

Vamos para a sua terceira reflexão, e esta, você a levará para seus colegas de olimpíada. Nos exemplos acima, os números ímpares são sempre escritos como 2 multiplicado por um número inteiro, somado com 1. Já os pares, são escritos como 2 multiplicado por um número inteiro. Como escrever isso então? Bem, isso significa que todo número ímpar é escrito da forma $2k + 1$, e todo par, da forma $2k$, para algum número k inteiro. Como assim? Ora, vamos escrever exemplos nesse caderno.

- 45 é impar, pois

  $$45 \div 2 = 22, \text{ com resto 1, então } 45 = 2 \cdot 22 + 1$$

  então no caso de 45, o nosso inteiro é 22. E escrevemos $45 = 22 \cdot 2 + 1$;

- 64 é par, pois

  $$64 \div 2 = 32, \text{ com resto 0, então } 64 = 2 \cdot 32$$

  então no caso de 64, o nosso inteiro é 32. E escrevemos $64 = 32 \cdot 2$.

Tente fazer a mesma coisa nos exemplos a seguir.

(a) 25

(b) 2022

(c) -19

(d) -2021

10.2 Propriedades

Há alguns minutos você teve uma grande descoberta. Uma nova forma de escrever números inteiros, e particularmente, números pares e ímpares. Então vamos fazer algumas operações com eles e ver o que acontece.

Se somarmos 16 e 24, dois pares, o resultado é 40, outro número par. Além disso, se somarmos 17 + 25, dois ímpares, o resultado é 42, outro número par. Oras, mas como isso acontece? Será que só ocorre com esses números em específico, ou com quaisquer pares e ímpares? Vamos checar primeiro a soma de pares. A de ímpares, fica a seu critério tentar no seu caderno.

Tome um número par escrito da forma $2k_1$ e outro da forma $2k_2$, para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Somando-os, temos

$$(2k_1) + (2k_2) = 2 \cdot (k_1 + k_2)$$

e esta é a estrutura de um número par (pois $k_1 + k_2$ é soma de inteiros que é inteiro). Logo, a soma de dois números pares é sempre par. Te encorajamos a fazer esse pequeno teste para a soma e subtração de números ímpares.

Mas o que acontece na multiplicação? Se multiplicarmos 17 por 3, o resultado é 51, um número ímpar. Mas, multiplicando 17 por 4, o resultado é 68, um número par. E, multiplicando 16 por 8, o resultado é 128, outro par. Novamente, o pensamento que deve vir a sua cabeça é: será que isso sempre ocorre? No primeiro caso, multiplicamos um número ímpar por outro ímpar, e o resultado deu ímpar. Vamos checar se isso vale para todo ímpar. Tome um número ímpar escrito da forma $2k_1 + 1$ e outro da forma $2k_2 + 1$, onde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Daí, multiplicando, temos

$$\begin{aligned}(2k_1 + 1) \cdot (2k_2 + 1) &= (2k_1) \cdot (2k_2) + (2k_1 \cdot) + (2k_2) + 1 \\ &= 2 \cdot (2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1\end{aligned}$$

que é a estrutura de um número ímpar. Então o produto de números ímpares é sempre ímpar. Te encorajamos a provar as demais situações abaixo, que representa todas as propriedades que podemos observar quando realizamos operações entre números pares e ímpares. Vamos representar I por um número ímpar e P por um número par.

(a) $P_1 + P_2 = P$

(b) $I_1 + I_2 = P$

(c) $I_1 + P_1 = I$

(e) $P_1 \cdot P_2 = P$

(f) $I_1 \cdot I_2 = I$

(g) $I_1 \cdot P_1 = P$

10.3 Problemas Resolvidos

Problema 1: Existem números inteiros a e b tais que $a \cdot b \cdot (a - b) = 2021$?

Solução: Para que o produto de números inteiros seja ímpar, é necessário que cada número na operação seja ímpar, isto é, a, b e $a - b$ sejam ímpares. Se a e b são ímpares, então podemos escrever

$$a = 2 \cdot k_1 + 1$$

$$b = 2 \cdot k_2 + 1$$

com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Mas se isso acontecer, então

$$a - b = 2 \cdot k_1 + 1 - (2 \cdot k_2 + 1) = 2 \cdot (k_1 - k_2)$$

temos que $a - b$ é par, e não ímpar. Como o produto não é só de números ímpares, o resultado não pode ser ímpar. Logo, não existem inteiros a e b tais que $a \cdot b \cdot (a - b) = 2021$.

Problema 2: Prove que todo número natural e seu quadrado têm a mesma paridade.

Solução: Suponha que nosso número natural a seja par. Então $a = 2 \cdot k$ para alguma $k \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$a^2 = (2 \cdot k)^2 = 4 \cdot k^2 = 2 \cdot (2 \cdot k^2)$$

temos que a^2 também é par. Se a for ímpar, então $a = 2 \cdot k + 1$. Daí,

$$\begin{aligned} a^2 = (2 \cdot k + 1)^2 &= (2 \cdot k)^2 + 2 \cdot 2 \cdot k \cdot 1 + 1^2 \\ &= 2 \cdot [(2 \cdot k^2) + (2 \cdot k)] + 1 \end{aligned}$$

temos que a^2 também é ímpar.

Problema 3: Podemos trocar uma nota de 25 reais usando 10 notas que podem assumir os valores de 1, 3 e 5?

Solução: Perceba que se precisarmos de 10 notas para formar 25 reais, então somaremos uma quantidade par de notas. No entanto só podemos somar números ímpares, no caso, 1, 3 ou 5. *Mas se somarmos uma quantidade par de números ímpares, o resultado é sempre par*. Como 25 é ímpar, não é possível.

Problema 4: Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

Solução: Não é possível. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa. Bem, facilmente obtemos $7 \cdot 9 = 63$ estradas.

Como cada estrada liga duas cidades, a contagem que fizemos contou cada estrada duas vezes. Logo o numero obtido teria que ser par.

Problema 5: Prove que numa festa com n pessoas, o numero de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.

Solução: Numere as pessoas de 1 até n e denote por d_i o numero de amigos da pessoa i. Imagine que existe um fio entre duas pessoas que se conhecem. Se E denota a quantidade de fios, temos

$$d_1 + d_2 + ... + d_n = 2E,$$

pois cada fio é contado duas vezes, um para cada ponta. Como o lado direito é par, no lado esquerdo devemos ter uma quantidade par de números ímpares.

10.4 Exercícios

Problema 1: O produto de 22 números inteiros é igual a 1. Mostre que a soma desses 22 números não pode ser igual a zero.

Problema 2: Em um conjunto de dominós, são descartados todos os que não têm bolinhas em todas as extremidades. Os dominós remanescentes podem ser arrumados em uma cadeia?

Problema 3: (Torneio das Cidades 1987) Uma máquina dá cinco fichas vermelhas quando alguém insere uma ficha azul e dá cinco fichas azuis quando alguém insere uma ficha vermelha. Pedro possui apenas uma ficha azul e deseja obter a mesma quantidade de fichas azuis e vermelhas usando essa máquina. É possível fazer isto?

Problema 4: É possível arrumar os números de 1 até 9 em uma sequência de modo que exista uma quantidade ímpar de números entre 1 e 2, entre 2 e 3,..., entre 8 e 9?

Problema 5: Um tabuleiro quadrado 5×5 pode ser coberto por dominós 1×2 ?

Problema 6: Prove que para quaisquer inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o número:

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_n - a_1|$$

é par.

Problema 7: (Rússia 1984) O número de todos os inteiros positivos de 64 dígitos sem zeros em sua representação e que são divisíveis por 101 e par ou ímpar?

Problema 8: Paula comprou um caderno com 96 folhas, com páginas enumeradas de 1 a 192. Nícolas arrancou 25 folhas aleatórias e somou todos os 50 números escritos nestas folhas. É possível que esta soma seja 1990?

Problema 9: Existem 100 soldados em uma quartel, toda noite, três deles ficam de guarda. Após um certo período de tempo, e possível que cada soldado tenha ficado da guarda exatamente uma vez com cada outro soldado?

Problema 10: Escolhe-se um número com 17 algarismos e inverte-se a ordem de seus algarismos, formando um novo número. Estes dois números são somados. Mostre que sua soma contém pelo menos um algarismo par.

Referências

[1] Fomin, D. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa*, SBM, IMPA, 2014.

[2] Portal da OBMEP, *https://portaldaobmep.impa.br/*

[3] Clubes de Matemática da OBMEP, *http://clubes.obmep.org.br/blog/numeros-especiais-pares-e-impares/numeros-especiais-pares-e-impares-problemas-envolvendo-paridade/*

[4] Material Paridade POTI, *https://poti.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=1*

11 Divisibilidade e Congruência (por Lucas Hiroshi Nakagawa)

11.1 Divisibilidade

Definição 1. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a divide b, ou que b é múltiplo de a, se existe um número $q \in \mathbb{Z}$ para o qual $b = a \cdot q$. Nesse caso, escrevemos $a|b$.

Exemplo 11.1. A seguir temos alguns exemplos de divisibilidade

- Observe que $8|8$, visto que podemos escrever $8 = 8 \cdot 1$.
- Também podemos afimar que $7|14$, onde $14 = 7 \cdot 2$.
- Observe que, para qualquer n, temos $n = n \cdot 1$, então $1|n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, de modo análogo, note que $n|n$.

Teorema 11.1. *Sejam a, b e c inteiros, então temos as seguintes propriedades de divisibilidade:*

1. *Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b + c$;*
2. *Se $a|b$ e $a|c$, então $a|b - c$;*
3. *Se $a|b$, então $a|bc$;*
4. *Se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$;*
5. *Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.*

Prova.

1. Como $a|b$ e $a|c$, temos $b = aq_1$ e $c = aq_2$ então $b + c = aq_1 + aq_2 \Rightarrow b + c = a(q_1 + q_2)$ e portanto $a|b + c$. Observe que intuitivamente quando colocamos o a em evidência vemos que $b + c$ é múltiplo de a.
2. Como $a|b$ e $a|c$, temos $b = aq_1$ e $c = aq_2$ então $b - c = aq_1 - aq_2 \Rightarrow b - c = a(q_1 - q_2)$ e portanto $a|b - c$. Note que analogamente ao item 1 dessa prova, temos o a em evidência, mostrando que $b - c$ é múltiplo de a.
3. Dado que $a|b$ podemos tomar $b = aq_1 \Rightarrow bc = aq_1c$ e portanto $a|bc$.
4. Tendo que $a|b$ e $c|d$, podemos escrever $b = aq_1$ e $d = cq_2$, então $bd = (aq_1)(cq_2) = (ac)(q_1q_2)$ e portanto $ac|bd$ já que bd é um múltiplo de ac.
5. Se $b|c$, então escrevemos $c = bq_2$ e note que $a|b$, portanto $a|bq_2 \Rightarrow a|c$.

$\square$

Agora veremos um exemplo de cada propriedade:

Exemplo 11.2. Observe que $2|6$ e também $2|36$, note que $6+36=42$ e portanto $2|42$.

Exemplo 11.3. Veja que $3|18$ e $3|6$, perceba que $18-6=12$ e portanto $3|12$.

Exemplo 11.4. Se $7|49$, então $7|49\cdot 2 \Rightarrow 7|98$.

Exemplo 11.5. Note que $3|12$ e $7|49$, então $3\cdot 7|12\cdot 49 \Rightarrow 21|588$

Exemplo 11.6. Se $9|81$ e $81|243$, então $9|243$.

11.2 Algoritmo de Euclides

Teorema 11.2 (Euclides)**.** *Seja a um inteiro positivo. Dado qualquer b um inteiro podemos escrever de modo único $b = aq + r$ com q inteiro e $r = 0, 1, 2, \ldots, a-1$.*

Antes de demonstrarmos, vamos explicar a ideia da prova por um exemplo.

Sejam $a = 8$ e $b = 43$. Considere o conjunto

$$R = \{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : m = 43 - 8q \ \text{ para algum } \ q \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que R é não vazio, pois $43-5 = 35$ e $35 \in R$, já que $35 > 0$, temos que R admite um menor elemento, que denotaremos por r. Claramente $r = 43 - 8q \geq 0$, para $q \geq 0$. Mostraremos que $r < 8$. Com efeito, se $r \geq 8$, então

$$r = 43 - 8q \geq 8 \Rightarrow 43 - 8(q+1) \geq 0.$$

Por outro lado,

$$8 > 0 \Rightarrow 43 - 8(q+1) < 43 - 8q,$$

contradizendo o fato de que $r = 43 - 8q$ é o menor elemento de R.

Agora, repetiremos a construção acima num contexto mais geral.

Demons. Tome o caso de b positivo pois o outro caso é análogo. *Existência* de q e r: Se $b < a$, basta tomar $b = a$, então tomamos $q = 1$ e $r = b$. Assim, assumiremos também que $b > a > 0$.
Fixe a e b, considere o conjunto

$$R = \{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : m = b - aq \ \text{ para algum } \ q \in \mathbb{Z}\}.$$

Note que R é não vazio, pois $b - a \in R$, já que $b - a > 0$, temos que R admite um menor elemento, que denotaremos por r. Claramente $r = b - aq \geq 0$, para $q \geq 0$. Mostraremos que $r < a$. Com efeito, se $r \geq a$, então

$$r = b - aq \geq a \Rightarrow b - a(q+1) \geq 0.$$

Por outro lado,
$$a > 0 \Rightarrow b - a(q+1) < b - aq,$$
contradizendo o fato de que $r = b - aq$ é o menor elemento de R.
Unicidade de q e r: agora provaremos que q e r escolhidos dessa forma, são únicos. Com efeito, iremos supor que existem outros inteiro r_1 e q_1 tais que $b = aq_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < a$. Por um lado, temos $-a < r - r_1 < a$.
Por outro lado temos
$$aq + r = aq_1 + r_1$$
$$\Rightarrow (r - r_1) = (q_1 - q)a.$$

Se tivéssemos $q_1 - q \neq 0$, como $q_1 - q$ é inteiro devemos ter $q_1 - q \geq 1$ ou $q_1 - q \leq -1$. No primeiro caso, teríamos $r - r_1 \geq a$, enquanto que no segundo caso, $r - r_1 \leq -a$. Logo $q_1 - q = 0$, donde $r_1 - r = 0$. Assim a solução é única. □

Exemplo 11.7. Encontre q e r na divisão de $a = 29$ por $b = 13$ que satisfaçam as condições do algoritmo da divisão.

Solução. Observe que temos a seguinte expressão
$$29 = 13 \cdot q + r.$$
Temos que pegar um q tal que $13q \leq 29$ para que satisfaça a condição de $r < 13$. Note que dadas as condições, só obteremos duas possibilidades para q:

- $q = 1$
- $q = 2$

Se $q = 1 \Rightarrow 29 = 13 \cdot 1 + r$ e percebemos que $r = 16$, mas r deve ser menor que 13 e portanto $q = 1$ não é válido.
Tome $q = 2$, note que $29 = 13 \cdot 2 + r \Rightarrow r = 3$, satisfazendo a condição de $r < 13$.
Portanto vale para $q = 2$ e $r = 3$. □

Exemplo 11.8. (OCM 1985) Encontre o quociente da divisão de $a^{128} - b^{128}$ por
$$(a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)$$
Solução. Escreva $B = a^{128} - b^{128}$ e
$$A = (a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b).$$
Queremos encontrar o valor do quociente $q = B/A$.
Observe que usando produtos notáveis, conseguimos a identidade
$$(a^{128} - b^{128}) = (a^{64} + b^{64})(a^{64} - b^{64})$$
Repetindo o processo várias vezes, temos que
$$(a^{128} - b^{128}) = (a^{64} + b^{64})(a^{32} + b^{32})(a^{16} + b^{16})(a^8 + b^8)(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b) \cdot (a - b).$$
Portanto, fazendo a substituição, $q = (a - b)$. □

11.3 O Teorema de Bezout

Nesta seção não apresentaremos o Teorema de Bezout propriamente dito, mas sim uma consequência do mesmo muito simples e fácil de enunciar. Para isso precisaremos relembrar o conceito de número primo.

Definição 2. Um número inteiro p maior ou igual a 2 é dito primo, se é divisível apenas por 1 e por p.

Teorema 11.3. *Se p é primo e $p|ab$ então $p|a$ ou $p|b$.*

Exemplo 11.9. Veja que $11 \nmid 100$, pois podemos escrever $100 = 10 \times 10$ e como $10 < 11$, $11 \nmid 10$.

Exemplo 11.10. Se $13|12k$, então $13|k$, pois $13 \nmid 12$.

Corolário 1. *Se $p|a_1a_2\dots a_n$, então $p|a_i$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Prova. Veja que se $p|a_1\dots a_n$ então $p|a_1\dots a_{n-1}$ ou $p|a_n$. Se $p|a_n$, a demonstração acaba, caso contrário, $p|a_1\dots a_{n-1}$. Repetindo o processo, pelo Teorema $p|a_{n-1}$ ou $p|a_1\dots a_{n-2}$. No primeiro caso, a demonstração acaba. Se não vale o primeiro caso, podemos repetir o processo. Fazendo isso $n-1$ vezes o resultado é demonstrado. □

A seguir daremos um exemplo de como utilizar o Teorema para resolver equações com números inteiros.

Exemplo 11.11. Encontre todos os pares de inteiros positivos x e y tais que

$$7 + x^2 = y^2.$$

Solução. Veja que $7 = y^2 - x^2$, segue que $7 = (y+x)(y-x)$. Como 7 é um número primo, temos duas possibilidades:

1. $(y+x) = 1$ e $(y-x) = 7$
2. $(y+x) = 7$ e $(y-x) = 1$

Note que o primeiro caso não é possível, pois dois inteiros positivos não podem somar 1. Já para o segundo caso, vemos que $(y+x) = 7$ e $(y-x) = 1$, então, resolvendo o sistema temos que o único par possível é $x = 3, y = 4$.

□

11.4 Congruência

Agora iremos definir Congruência (não é a de triângulos, muita gente se confunde) ou também visto como "Congruência módulo m".

Definição 3. Seja $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a *é congruente a* b *módulo* m, denotando por $a \equiv b \pmod{m}$, quando $m|a-b$.

Exemplo 11.12. Como $5|23-18$, então afirmamos que $23 \equiv 18 \pmod{5}$.

Também diremos que a é incongruente a b módulo m, que tem as notações $a \not\equiv b \pmod{m}$, quando $m \nmid a-b$.

Exemplo 11.13. Observe que $5 \nmid 24-3$ logo $24 \not\equiv 3 \pmod{5}$

Observação: Veja que $a \equiv 0 \pmod{m}$ significa que $m|a-0$, donde $m|a$, ou seja, uma forma de escrever que a deixa resto 0 na divisão por m.

Teorema 11.4. *Sejam a, b e m inteiros tais que $a \equiv b \pmod{m}$ temos as seguintes propriedades:*

1. $a \equiv a \pmod{m}$ *(Reflexividade.)*
2. $a \equiv b \pmod{m}$*, então* $b \equiv a \pmod{m}$ *(Simetria.)*
3. $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $b \equiv c \pmod{m}$*, então* $a \equiv c \pmod{m}$ *(Transitividade.)*

Prova. 1. Sabendo que $m|0$ para todo m, e $0 = a - a$ temos $m|a-a$. Daí, pela definição de módulo, obtemos que $a \equiv a \pmod{m}$

2. Se $m|b-a$, então $m|-1(b-a)$ donde $m|a-b$. Logo, por definição de congruência, $b \equiv a \pmod{m}$.

3. Observe que $m|b-a$ e $m|d-b$. Pela propriedade 2 do Teorema 11.1 vem: $m|(b-a)+(d-b) \Rightarrow m|d-a$ e portanto $a \equiv b \pmod{m}$

□

Exemplo 11.14. 1. $3 \equiv 3 \pmod{6}$.

2. Observe que $7|15-1$ e portanto $15 \equiv 1 \pmod{7}$, que pela propriedade 2 afirmamos $1 \equiv 15 \pmod{7}$.

3. Observe que $5|12-7$ e por isso $12 \equiv 7 \pmod{5}$ e também $5|7-2$ logo $7 \equiv 2 \pmod{5}$ e portanto $12 \equiv 2 \pmod{5}$.

Proposição 1. *Sejam a, b, c e m inteiros. Sabendo que $a \equiv b \pmod{m}$ também valem essas propriedades:*

1. $a + c \equiv b + c \pmod{m}$*;*

2. $a - c \equiv b - c \pmod m$;

3. $ac \equiv bc \pmod m$.

Prova. 1. Observe que por hipótese $a \equiv b \pmod m \Rightarrow m|a-b$, perceba que

$$a - b = a - b - c + c = (a+c) - b - c = (a+c) - (b+c),$$

logo se $m|a-b$, então $m|(a+c)-(b+c)$ e portanto $a + c \equiv b + c \pmod m$

2. Analogamente ao anterior iremos somar e subtrair c. Teremos, que

$$a - b = a - b + c - c = a - c - b + c = (a-c) - (b-c).$$

Logo tendo que $m|a-b$ implica que $m|(a-c)-(b-c)$ e portanto pela definição de módulo, vem $(a-c) \equiv (b-c) \pmod m$

3. Se $m|a-b$, pela propriedade 4 do Teorema 1.1 $m|(a-b)c = ac - bc$. Assim pela definição de congruência temos $ac \equiv bc \pmod m$.

□

Exemplo 11.15. 1. Considerando a notação da Proposição acima, tome $c = 4$. Como $17 \equiv 5 \pmod{12}$, segue que $17 + 4 \equiv 5 + 4 \pmod{12}$, isto é, $21 \equiv 9 \pmod{12}$.

2. Tome $c = 6$. Como $22 \equiv 9 \pmod{13}$, vale que $22 - 6 \equiv 9 - 6 \pmod{13}$ e portanto $16 \equiv 3 \pmod{13}$.

Teorema 11.5. *Se a, b, c e d são inteiros tais que $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, então:*

1. $a + c \equiv b + d \pmod m$;

2. $a - c \equiv b - d \pmod m$;

3. $ac \equiv bd \pmod m$.

Demons. 1. Se $m|a-b$ e $m|c-d$, então

$$\begin{aligned} &m|(a-b)+(c-d) \\ \Rightarrow\ &m|(a+c)-b-d. \end{aligned}$$

Seguindo que $m|(a+c)-(b+d)$ e consequentemente $a + c \equiv b + d \pmod m$.

2. Se $m|a-b$ e $m|b-d$, então

$$\begin{aligned} &m|(a-b)-(c-d) \\ \Rightarrow\ &m|(a-c)-b+d \\ \Rightarrow\ &m|(a-c)-(b-d). \end{aligned}$$

Logo teremos $a - c \equiv b - d \pmod m$.

3. Se $m|a-b$ então $m|(a-b)c$, o que, por sua vez, implica $m|ac-bc$. Analogamente, como $m|c-d$ segue que $m|(c-d)b$ donde $m|cb-db$. Por outro atributo de divisibilidade, dados que $m|ac-bc$ e $m|cb-db$ concluímos que $m|ac-bc+cb-db$ o que implica $m|ac-bd$. Portanto $ac \equiv bd \pmod{m}$.

□

Exemplo 11.16.

1. Dados $10 \equiv 3 \pmod{7}$ e $12 \equiv 5 \pmod{7}$, pela primeira propriedade podemos afirmar que $22 \equiv 8 \pmod{7}$, mas $8 \equiv 1 \pmod{7}$ e portanto $22 \equiv 1 \pmod{7}$.

2. Tome $25 \equiv 1 \pmod{8}$ e também $9 \equiv 1 \pmod{8}$, então pela segunda propriedade temos que $34 \equiv 2 \pmod{8}$.

3. Olhe para $6 \equiv 2 \pmod{4}$ e $13 \equiv 1 \pmod{4}$ que pela terceira propriedade implica que $78 \equiv 2 \pmod{4}$.

Proposição 2. *Dados a, b, k e m inteiros com $k > 0$ e $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.*

Demons. Utilizaremos o item 3 do Teorema 11.5 $k-1$ vezes. Começamos com $c = a$ e $d = b$ e em cada rodada j tomaremos $c = a^j$ e $d = b^j$. De modo mais explícito, temos

$$\begin{aligned}
\text{Aplicando o item uma vez: } & a \cdot a \equiv b \cdot b \pmod{m} \\
& \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{m} \\
\text{Aplicando o item duas vezes: } & a \cdot a^2 \equiv b \cdot b^2 \pmod{m} \\
& \Rightarrow a^3 \equiv b^3 \pmod{m} \\
& \vdots \\
\text{Aplicando o item } k-1 \text{ vezes: } & a \cdot a^{k-1} \equiv b \cdot b^{k-1} \pmod{m} \\
& \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}.
\end{aligned}$$

Como de fato você pode repetir o processo a quantidade de vezes que você quiser, então podemos pegar qualquer $k > 0$.

Outra forma de demonstrar esse resultado é via produtos notáveis. Tome a identidade

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Por hipótese $a \equiv b \pmod{m}$, então podemos afirmar por definição que $m|a-b$. Como $(a-b)$ é fator de $a^k - b^k$, então $m|a^k - b^k$ e portanto $a^k \equiv b^k \pmod{m}$. □

Uma das formas que podemos usar a notação de congruência é para determinar que *um número a deixa resto r na divisão por m*.

Proposição 3. *Se a deixa resto r na divisão por m, então podemos escrever $a \equiv r \pmod{m}$.*

Prova. Podemos escrever $a = m \cdot q + r \Rightarrow a - r = m \cdot q$, como $a - r$ é um múltiplo de m chegamos que $m|a - r$ por conseguinte conseguimos que $a \equiv r \pmod{m}$. □

Exemplo 11.17. Dado n inteiro, calcule o resto da divisão de 3^{3n} por 13.

Demonstração. Observe que $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ que implica $(3^3)^n \equiv 1^n \pmod{13}$. Logo $3^{3n} \equiv 1 \pmod{13}$. □

Exemplo 11.18. Observe que 15 deixa resto 3 na divisão por 4, o que significa que $15 = 3 \cdot 4 + 3$, ou seja, $15 \equiv 3 \pmod{4}$.

Exemplo 11.19. Veja que o resto da divisão de um número inteiro positivo n por 10 é o seu dígito das unidades. Assim, se n termina com o dígito 7, por exemplo, então $n \equiv 7 \pmod{10}$.

11.5 Problemas resolvidos

Exemplo 11.20. (Albanian National Math Olympiad 2012) Encontre todos os primos p tal que $p + 2$ e $p^2 + 2p - 8$ são primos também.

Solução. Muitas vezes em olimpíadas, mostramos que um número não é primo simplesmente mostrando que ele pode ser fatorado. No exemplo que estamos considerando, note que podemos escrever $p^2 + 2p - 8$ como $(p - 2)(p + 4)$. Como esse número é primo, o menor dos seus fatores deve ser obrigatoriamente igual a 1, daí $p - 2 = 1$, donde $p = 3$. Portanto $p + 2 = 5$ e $p^2 + 2p - 8 = 7$. □

Exemplo 11.21. Mostre que $4^k - 1$ é divisível por 3

Demonstração. Note que $4 \equiv 1 \pmod{3}$ e portanto $4^k \equiv 1^k \pmod{3}$ que implica $4^k - 1 \equiv 0 \pmod{3}$. □

Exemplo 11.22. Determine o dígito das unidades de 3^{2022}.

Demonstração. Dado qualquer número, para saber o algarismo da unidade basta olhar o resto dele na divisão por 10. Pelo algoritmo de Euclides, queremos encontrar r, k inteiros não negativos, com $0 \leq r < 10$ de modo que $3^{2022} = 10k + r$. Mas veja que isso implica que $10k = 3^{2022} - r$, donde $10|3^{2022} - r$. Assim, nosso trabalho consistem em encontrar $r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ de modo que $3^{2022} \equiv r \pmod{10}$.

Note que $3^{2022} = (3^2)^{1011} = 9^{1011}$, além disso, $9 \equiv -1 \pmod{10}$, daí

$$3^{2022} \equiv 9^{1011} \equiv (-1)^{1011} \pmod{10}.$$

Mas veja que $(-1)^{1011} = -1$, daí

$$3^{2022} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}.$$

Portanto, como resto da divisão é 9, temos que o último algarismo é 9.

□

Exemplo 11.23. Quais os restos que um número x^2 deixa na divisão por 4?

Solução. Note que na divisão por qualquer k um resto r deve ser menor que k, ou seja, $r \in \{0, 1, 2, ..., k-1\}$. Com efeito, os possíveis restos de x na divisão por 4 é $0, 1, 2, 3$, ou seja

- $x \equiv 0 \pmod 4$;
- $x \equiv 1 \pmod 4$;
- $x \equiv 2 \pmod 4$;
- $x \equiv 3 \pmod 4$.

Que pela **Proposição 2** obtemos que:

- $x^2 \equiv 0^2 \equiv 0; \pmod 4$
- $x^2 \equiv 1^2 \equiv 1; \pmod 4$
- $x^2 \equiv 2^2 \equiv 0; \pmod 4$
- $x^2 \equiv 3^2 \equiv 1. \pmod 4$

Logo, ou $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ ou $x^2 \equiv 1 \pmod 4$. □

Exemplo 11.24. (Azerbaijan third round 2020(JBMO Shortlist 2019 N6)) Com a, b, c inteiros positivos. Resolva a equação:

$$2^{a!} + 2^{b!} = c^3$$

Solução. Tomando $a, b \geq 3$, observamos que $6|a!$ e $6|b!$, logo $a = 6k_1$, $b = 6k_2 \Rightarrow 2^{6K_1} = (2^6)^{k_1}$. Mas observe que $2^6 \equiv 1 \pmod 9$ então podemos chegar que $2^{6k_1} \equiv (2^6)^{k_1} \equiv (1)^{k_1} \equiv 1 \pmod 9$. O caso para o k_2 é análogo e por isso podemos concluir que $2^{6k_1} + 2^{6k_2} \equiv 2 \pmod 9$ que é um absurdo já que um cubo só deixa resto $0, 1$ e 8 no módulo 9 *(Demonstração do argumento dos restos de um cubo fica de exercício para o leitor)*.

Então resta avaliar os casos em que $a \leq 2$ ou $b \leq 2$. Observe que, pelas hipóteses, c tem que ser par, logo podemos escrever $c = 2d$ e $c^3 = 8d^3$. Assim $8|c^3$. Suponha sem perda de generalidade que $a \leq b$ e $a \leq 2$ (o outro caso é análogo). Se $b > a$, então

$$8d^3 = 2^{a!} + 2^{b!} = 2^{a!}(1 + 2^{b!-a!}).$$

Como $b > a$, segue que $(1 + 2^{b!-a!})$ é ímpar e como $a \leq 2$, segue que 2^a ou é 1 ou é 2. Portanto $8 \not| 2^{a!}(1 + 2^{b!-a!})$, absurdo. Finalmente, para $b = a$, podemos fazer os testes e verificar que a única solução é $a = b = 2$, que nos dá $c = 2$. □

Exemplo 11.25. Para todo inteiro positivo n, determine o maior k que $2^k | 3^n + 1$.

Solução. Tome $k > 2$ então podemos olhar o módulo 8, já que se $8 \not| 3^n + 1$, então para qualquer $k > 3$ temos $2^k \not| 3^n + 1$.

Observe que

- $3^1 + 1 = 4$ e 4 deixa resto 4 na divisão por 8;
- $3^2 + 1 = 10$ e 10 deixa resto 2 na divisão por 8;
- $3^3 + 1 = 28$ e 28 deixa resto 4 na divisão por 8;

  $\vdots$

A partir daqui teremos os mesmos restos (exercício para o leitor), o que significa que $3^n+1 \equiv 2 \pmod 8$ ou $3^n+1 \equiv 4 \pmod 8$, ou seja, $2^k \not| 3^n+1$ para $k \geq 3$. Olhemos agora para $k = 2$, observe que $3 \equiv -1 \pmod 4$ e portanto podemos dizer que $3^n+1 \equiv (-1)^n+1 \pmod 4$. Como queremos o maior k para que $2^k | 3^n + 1$ podemos pegar $k = 2$ desde que n seja ímpar e $k = 1$ para qualquer n. Mas como queremos o maior k, diremos que $k = 2$ para n ímpar (convenientemente).

$\square$

11.6 Exercícios propostos

Exercício 11.1. Calcule o resto da divisão de 2^{2k+1} por 3.

Exercício 11.2. Sabendo que p, $p + 2$ e $p + 4$ são números primos, encontre p.

Exercício 11.3. Mostre que todo número da forma $23^{8n} - 1$ é divisível por 17.

Exercício 11.4. Mostre que todo número da forma $4^{3n} + 1$ é divisível por 13.

Exercício 11.5. (Angola 2014). Determine todas as quádruplas de inteiros positivos (k, a, b, c) tais que $2^k = a! + b! + c!$, com $a \geq b \geq c$.

Exercício 11.6. (Azerbaijão 2020 e JBMO Shortlist 2019 N6). Dados a, b e c inteiros não negativos. Resolva: $a! + 5^b = 7^c$

Exercício 11.7. (OBM 2014). O imparial de n é igual ao produto de todos os naturais ímpares menores ou iguais a n. Quais são os três últimos algarismos do imparial de 2014?

Exercício 11.8. Quais os restos que x^2 deixa na divisão por 3?

Exercício 11.9. Mostre que para nenhum $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 1$ é um cubo.

Exercício 11.10. Mostre que além de $2 = 1^3 + 1$, nenhum número escrito na forma $n^3 + 1$ é primo.

Exercício 11.11. Encontre o resto da divisão de 3^{1000} por 101.

Exercício 11.12. Mostre que a equação $x^3 - 117y^3 = 5$ não possui soluções inteiras.

Exercício 11.13 (República Tcheca e Eslovaca - 2000)**.** Se n é número natural, mostre que $4 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 4^{2^n}$ é divisível por 13 se, e somente se, n é par.

Referências

[1] Angel Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1998.

[2] Nicolau C. Saldanha Eduardo Tengan Fabio E. Brochero Martinez, Carlos Gustavo T. de A. Moreira. *Teoria dos Numeros: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. IMPA, 2018.

[3] José Plínio de Oliveira Santos. *Introdução à teoria dos números*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

[4] Alan Pereira e Leonardo Marinho e Jairon Batista. *OBM por Assunto Vol2. Teoria dos Números*. A publicar.

12 O Princípio de Indução (por Jairon Batista)

12.1 Indução Fraca

Indução matemática é de longe um dos métodos mais úteis para resolver problemas sobre números inteiros. A ideia de indução é muito simples e algo, até certo ponto, natural de se pensar. Sendo assim, antes de te contar o que é indução, convido-lhe a pensar comigo no seguinte problema, mas antes de ler a solução, por gentileza, lembre-se de tentá-lo sozinho por um tempo (aliás, isso vale para todos os problemas desse texto).

Exemplo 12.1. Para todo inteiro positivo n, considere um quadriculado $2^n \times 2^n$ do qual um quadradinho 1×1 qualquer foi removido. Prove que é possível cobrir completamente tal quadriculado usando apenas peças de 3 quadradinhos em formato de "L".

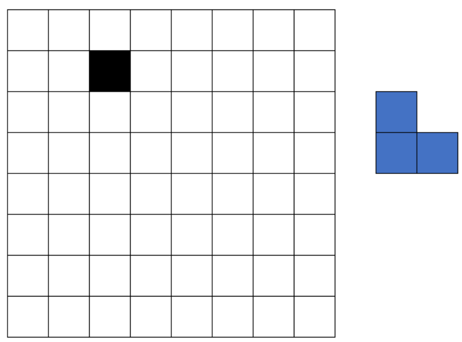


Figura 1: Exemplo de tabuleiro e peça em L. A casa preta é a casa faltante.

Solução. A um primeiro olhar apressado, esse problema parece algo complicado, assim vamos considerar alguns casos simples para ter ideia do que está acontecendo (o que quase sempre é uma boa ideia). Se $n = 1$, todos os tabuleiros possíveis são idênticos a esse e é muito fácil de cobrir os tabuleiros, como feito na figura 2

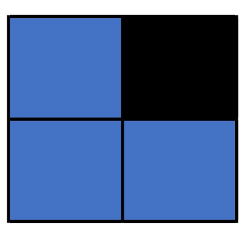


Figura 2: Tabuleiro 2×2 preenchido.

Se $n = 2$ ou $n = 3$ já não temos esse privilégio e temos muitos casos para tratar, como você pode ver na figura 3.

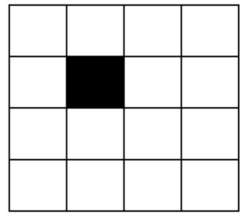


Figura 3: Tabuleiro 4×4.

O que iremos observar é que um tabuleiro 4×4 é a junção de 4 tabuleiros 2×2 e já sabemos resolver o problema para tabuleiros 2×2, desde que eles tenham um espaço faltante. Sendo assim, vamos posicionar a primeira peça, cobrindo todos os tabuleiros 2×2 exceto aquele que já tem o buraco (ou seja adicionamos a peça roxa da figura 4). E agora, é só cobrir os tabuleiro 2×2 como fizemos antes (demais casas coloridas).

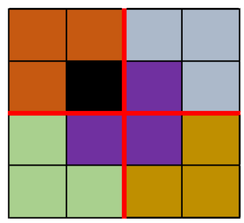


Figura 4: Tabuleiro 4×4 preenchido.

Agora você pode perguntar, se $n = 3$? Vamos reduzir a o caso $n = 2$, para isso basta dividir o tabuleiro 8×8 em 4 tabuleiros 4×4 e como antes, por uma peça que passa pelos 3 tabuleiros 4×4 que não tem o buraco (figura 5). Assim, resta preencher os tabuleiros 4×4 como já havíamos descrito antes.

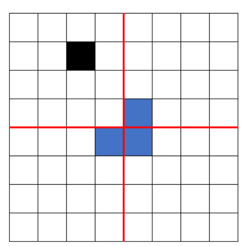


Figura 5: Tabuleiro 8×8 com uma peça no centro.

De modo geral, para n qualquer, dividiremos o tabuleiro $2^n \times 2^n$ em 4 tabuleiros $2^{n-1} \times 2^{n-1}$, colocaremos uma peça que passe pelos 3 tabuleiros onde não tem a casa faltante e assim o problema se reduz a preencher 4 tabuleiros $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Repetindo o processo, para preencher tabuleiros $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ basta saber preencher tabuleiros $2^{n-2} \times 2^{n-2}$ e assim por diante até chegarmos a tabuleiros 2×2, algo que já descrevemos como resolver. $\square$

Note que o que fizemos nesse problema foi primeiro provar o caso $n = 1$ e depois, demos um "jeitinho" de mostrar que vale para $n = 2$ a partir de $n = 1$, para $n = 3$ usando $n = 2$ e assim por diante, sempre usando o caso n para construir o caso $n + 1$.

Estamos prontos para enunciar o principio de indução

Princípio de indução: Seja $P(n)$ um afirmação sobre o número inteiro n. Se para algum $n_0 \in \mathbb{Z}$,

1. $P(n_0)$ é verdadeira;

2. Se $P(n)$ é verdadeira, então podemos concluir que $P(n + 1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$ inteiro.
Costumamos chamar (1) de "caso base" e (2) de "passo indutivo". Além disso quando estamos provando (2), costumamos chamar $P(n)$ de hipótese de indução.

Note que isso é igual ao que fizemos, antes. Tínhamos $P(n)$ sendo "existe uma forma de cobrir um tabuleiro $2^n \times 2^n$ com uma casa removida, com peças em L", mostramos que $P(1)$ é verdadeiro e depois mostramos que $P(n)$ é verdadeiro, colocando a peça central e usando $P(n - 1)$.

Chega de falar, vamos resolver mais problemas.

Exemplo 12.2. Quanto vale a soma dos primeiros n números ímpares?

Solução. Vamos chamar de S_n o valor soma dos primeiros n números ímpares. Para ter uma ideia do que está acontecendo, vamos calcular alguns casos iniciais (aliás, sempre que possível, sugiro começar a pensar em um problema assim)

- Para $n = 1$, $S_1 = 1$;
- Para $n = 2$, $S_2 = 1 + 3 = 4$;
- Para $n = 3$, $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$;
- Para $n = 4$, $S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

Conseguiu achar um padrão? Aparentemente $S_n = n^2$

- Para $n = 1$, $S_1 = 1 = 1^2$;
- Para $n = 2$, $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$;
- Para $n = 3$, $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$;
- Para $n = 4$, $S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

Claro que isso não mostra que $S_n = n^2$ para todo n natural (isso se quer mostrar que $S_5 = 25$), mas podemos usar essa padrão para dar um chute do que iremos provar. Vamos tentar provar que a afirmação "$S_n = n^2$ "é verdadeira, usando indução.

Já fizemos a base indutiva quando estudamos os primeiros exemplos. Faremos agora o passo indutivo.

Suponha $S_n = n^2$, vamos mostrar que $S_{n+1} = (n+1)^2$. Lembre-se que o n-ésimo número ímpar é dado $2n-1$, assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) \\ &= S_n + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \end{aligned}$$

□

Exemplo 12.3. Mostre que $n^3 - n$ é sempre múltiplo de 3.

Solução. Vamos resolver por indução. (Base indutiva) Para $n = 1$, a expressão é igual a $1^1 - 1 = 0$ que é certamente múltiplo de 3. Suponha que $n^3 - n$ é múltiplo de 3 (hipótese de indução) então

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n).$$

Note que $(n^3 - n)$ é múltiplo de 3 (hipótese de indução) bem como $3(n^2 + n)$ também é, daí $(n+1)^3 - (n+1)$ é múltiplo de 3. Isso finaliza o passo indutivo e portanto a prova. □

Exemplo 12.4. (Desigualdade de Bernoulli) Prove que para todo número real $x > -1$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Solução. Nota que temos duas variáveis, x e n, mas só podemos aplicar indução em variáveis inteiras, logo vamos usar indução em n. O caso base, $n = 1$, é imediato. Suponha válido para n, então como $1 + x \geq 0$,

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $nx^2 \geq 0$. Isso termina a prova. □

12.2 Indução Forte

Exemplo 12.5. Mostre que todo número natural pode ser escrito como soma de potências de 2 distintas (por exemplo, $53 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$ e consideremos que toda potência 2 é uma soma de potências de 2).

Solução. Após algumas tentativas você deve perceber que o método da indução finita não se aplica diretamente a esse problema. Então, vamos voltar a pensar como no problema 1 em casos particulares

- $3 = 2 + 1 = 2^1 + 2^0$
- $4 = 2^2$
- $5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0$
- $6 = 4 + 2 = 2^2 + 2^1$
- $7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$
- $8 = 2^3$
- $9 = 8 + 1 = 2^3 + 2^0$
- $10 = 8 + 2 = 2^3 + 2^1$

Sugiro que o leitor tente continuar a lista até o número 20, para perceber um padrão que começa a surgir... Sempre iniciamos a escrita de um número n com a potência de 2 mais próxima a ele!

Vamos tentar essa abordagem. Seja 2^m a potência de 2 mais próxima de n tal que $n \geq 2^m$. Queremos escrever $n = 2^m + j$ e depois, se $j \neq 0$, escrever j como soma de potências de 2 distintas (note que $j < 2^m$, do contrário $2^{m+1} > n \geq 2^m + 2^m = 2^{m+1}$). Vamos usar essa estratégia para escrever continuar a lista, acima depois do 20.

- Se $n = 21$, a potência de 2 mais próxima de 21 é o número 16, assim $j = 21 - 16 = 5$, mas já vimos ali em cima, como escrever $j = 5$ como somo de potências de 2. Assim $21 = 2^4 + 2^2 + 2^0$.
- Se $n = 22$, a potência de 2 mais próxima de 22 é o número 16, assim $j = 22 - 16 = 6$, mas já vimos ali em cima, como escrever $j = 6$ como somo de potências de 2. Assim $22 = 2^4 + 2^2 + 2^1$.

Curiosamente, sempre caímos em um caso que já havíamos resolvido antes...

Isso nos leva a querer fazer algo muito semelhante ao que fizemos antes. Para escrever n como sendo soma de potência de dois, basta escrever algum $j < n$ como soma de potência de 2.

Assim, se sabemos fazer para $n = 1$, conseguiremos fazer para $n = 2$. Agora como sabemos fazer para $n = 1$ e $n = 2$, sabemos fazer para $n = 3$. E agora que sabemos fazer para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, sabemos fazer para $n = 4$... Seguindo esses passos, saberemos fazer para todos os números naturais. $\square$

Com base em tudo o que foi apresentado neste texto até agora, enunciamos o

Princípio de indução forte: Seja $P(n)$ uma afirmação sobre o número inteiro n. Se para algum $n_0 \in \mathbb{Z}$,

1. $P(n_0)$ é verdadeira;
2. Se $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$ são verdadeiras, então podemos concluir que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$ inteiro.
Como antes, costumamos chamar (1) de "caso base"e (2) de "passo indutivo". Quando estamos provando (2), costumamos chamar $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$ de hipótese de indução.

Dica: Quando escrever uma solução para olimpíada, não é preciso reportar ao corretor os exemplos que você testou para ter ideias, além do caso base.

O princípio de indução forte é muito semelhante ao princípio de indução, mas neste usamos todos os termo anteriores e não somente o último.

Exemplo 12.6. Seja x um número real tal que $x + \frac{1}{x}$ seja inteiro. Mostre que $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro, para todo n natural.

Solução. Para $n = 1$ é válido pelo que diz o próprio enunciado. Suponha que se $k \leq n$ então $x^k + \frac{1}{x^k}$ é inteiro. Note que

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

Mas pela hipótese de indução $x^n + \frac{1}{x^n}$, $x + \frac{1}{x}$ e $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ são inteiros, por tanto $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ é inteiro, isso finaliza o passo indutivo e, portanto, a prova. □

12.3 Sequências Recursivas

Umas das formas mais clássicas de se usar indução são em problemas sobre sequências definidas por recursão. Uma sequência definida por recursão são aquelas que os próximos termos são definidos a partir dos anteriores.

Exemplo 12.7. (PA e PG) Considere as sequências (a_n) e (b_n). Chamamos a sequência (a_n) de progressão aritmética (PA) com razão r e (b_n) de progressão geométrica com razão q quando

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

$$b_{n+1} = qb_n.$$

Note que a partir do primeiro e da razão é possível achar todos os termos da sequência. Por exemplo, se a razão $r = q = 2$ e $a_1 = b_1 = 3$ os termos são

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

$$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

Exemplo 12.8. A sequência de Fibonacci, (F_n), é extremamente conhecida e utilizada em problemas olímpicos. Ela é definida com $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (é comum tomar $F_0 = 0$). Seus primeiros termos são

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

Devido a natureza da recursão dos termos seguintes serem determinadas por um ou mais termos anteriores, é natural que em problemas sobre recursão surjam a necessidade do uso de indução.

Exemplo 12.9. Seja (F_n) é sequência de Fibonacci, mostre que para $n \geq 1$

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Solução. Para $n = 1$ temos $F_1^2 = 1 = F_1 F_2$. Suponha que para n seja válido que

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1},$$

então

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2}.$$

Concluindo que é válido para $n + 1$ e, portanto, provando o desejado. □

Agora está com você. Se divirta com os seguintes exercícios.

12.4 Problemas Propostos

Exercício 12.1. Prove que para todo inteiro inteiro positivo n, $3^n \geq n^3$.

Exercício 12.2. Prove que $2^n > n^2$, para todo $n \geq 5$.

Exercício 12.3. Demonstre que

(a) $n^3 - n$ é sempre múltiplo de 3.

(b) $5^n - 1$ é sempre múltiplo de 5, para todo n par.

(c) $2^n + 1$ é sempre múltiplo de 5, para todo n impar.

Exercício 12.4. (a) Complete o quadrado da figura 1 do exemplo 12.1.

(b) Escreva 103 como soma de potência de dois distintas.

Exercício 12.5. Prove que para qualquer inteiro n existe um número com n dígitos, sendo cada um deles 0 ou 1, que seja divisível por 2^n.

Exercício 12.6. Sejam (a_n) e (b_n) um PA e um PG de razão r e q, respectivamente. Mostre

(a) $a_n = a_0 + nr$;

(b) $b_n = b_0 q^n$.

Sejam $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ e $S_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$.

(c) $s_n = \frac{(a_0+a_n)(n+1)}{2}$;

(d) $S_n = \frac{b_0(q^{n+1}-1)}{q-1}$.

Exercício 12.7. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ mostre que

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercício 12.8. Mostre que para $m, n \in N$

$$1 \cdot 2 \ldots m + 2 \cdot 3 \ldots (n+1) + \cdots + n(n+1) \ldots (n+m-1) = \frac{n(n+1) \ldots m}{m+1}.$$

Dica: faça indução em n, com m genérico.

Exercício 12.9. Em no máximo quantas regiões n retas cortam o plano?

Exercício 12.10. Para todo natural n,

$$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Exercício 12.11. Defina $n!$ recursivamente.

Exercício 12.12. Seja (F_n) a sequência de Fibonacci, mostre que

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Exercício 12.13. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Exercício 12.14. Mostre que todo número inteiro positivo pode ser escrito de forma única como soma de termos da sequência de Fibonacci.

Exercício 12.15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz $f(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$. Prove que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}.$$

Exercício 12.16. Sendo $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ tal que $f(1) = a > 0$ e que para todos $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Determine explicitamente a única função f como a cima.

Exercício 12.17. Para todo $n \in \mathbb{N}$ encontre o valor de

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n;$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n.$$

Exercício 12.18. De quantos modos pode-se preencher um tabuleiro $n \times 2$ com peças de dominó 2×1?

Exercício 12.19. (OBM 2020) Prove que existem inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_2} + \cdots + \frac{1}{2020a_{2020}} = 1.$$

Exercício 12.20. (Teste cone sul 2020) Prove que para todo inteiro positivo n existe um número M que pode ser simultaneamente escrito como a soma de $1, 2, \ldots, n$ quadrados perfeitos distintos

Exercício 12.21. (Reino Unido 1996) Uma função $f(x)$ definida nos inteiros positivos satisfaz $f(1) = 1996$ e $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n)$, $(n > 1)$. Calcule $f(1996)$.

Aproveita e calcula $f(n)$ para todo n.

Dica: Talvez a igualdade $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$ seja útil.

Exercício 12.22. (EGMO 2022) Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, determine o maior inteiro positivo N para o quais existe $N + 1$ números reais $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tal que

1. $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$;

2. $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para $1 \leq k \leq N - 1$.

Exercício 12.23. (IMC 2021) Sejam n e k inteiros positivos fixos, e seja a um inteiro não negativo arbitrário. Escolha aleatoriamente um subconjunto com k elementos X de $\{1, 2, ..., k+a\}$ e escolha aleatoriamente um subconjunto com n elementos Y de $\{1, ..., k+n+a\}$.

Prove que a probabilidade

$$P(\min(Y) > \max(X))$$

Não depende de a.

Dica: Considere $P_{n,k}^{a} = P(\min(Y) > \max(X))$*. mostre, por indução em* a *que* $P_{n,k}^{a} = \binom{n+k}{n}^{-1}$*. Para isso, condicione a probabilidade aos casos onde* $k+a+1$ *ou* $k+n+a+1$ *estão ou não em* X *e* Y*, respectivamente.*

Referências

[1] Angel Engel. *Problem-Solving Strategies*. Springer, 1998.

[2] Nicolau C. Saldanha Eduardo Tengan Fabio E. Brochero Martinez, Carlos Gustavo T. de A. Moreira. *Teoria dos Numeros: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. IMPA, 2018.

[3] José Plínio de Oliveira Santos. *Introdução à teoria dos números*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

[4] Alan Pereira e Leonardo Marinho e Jairon Batista. *OBM por Assunto Vol2. Teoria dos Números*. A publicar.

13 O Teorema de Bolzano-Weierstrass (por Francisco Alan Lima)

13.1 Limites de Sequências

Uma sequência é uma lista infinita e ordenada de elementos que chamaremos de *termos*: há um primeiro termo, depois um segundo, e aí um terceiro, e assim sucessivamente. Chamando o primeiro termo de s_1, o segundo de s_2, ... , o n-ésimo de s_n, ... , a sequência desses termos será a lista $(s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$. Definiremos o *conjunto dos números naturais*, como o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Definição 4. A uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ damos o nome de *sequência* de números reais. Para denotar uma sequência usaremos $i.$ $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ou $ii.$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, além da notação dada acima. Cada valor $s_n = s(n)$ é dito ser o n-ésimo termo da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por simplicidade, muitas vezes escreveremos $(s_n)_n$, ou mais simplesmente (s_n), para denotar a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 13.1. Para todo número inteiro positivo n, a sequência $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem como n-ésimo termo o n-ésimo número par maior que 0. A sequência $(0, \cdots, 0, \cdots)$, chamada de sequência identicamente nula, é uma sequência formada apenas por zeros. Um exemplo menos trivial é a sequência $(a_n)_n$, onde a_n é $n + 1$, se n é ímpar e $n/2$ se n é par. Os primeiros termos desta última são $(2, 1, 4, 2, 6, 3, 8, 4, \cdots)$.

Exemplo 13.2. O conjunto $\{s_1, \ldots, s_n, \ldots\}$ dos termos da sequência $(s_1, \ldots, s_n, \ldots)$ não deve ser confundido com ela própria. A sequência $(0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots)$ formada apenas por zeros e uns, não é a mesma coisa do conjunto $\{0, 1\}$ dos seus termos.

Um dos conceitos fundamentais neste texto é o de sequência limitada:

Definição 5. Uma sequência $(s_n)_n$ é dita *limitada* quando para todo $n \in \mathbb{N}$, existem números reais a e b, para os quais $a \leq s_n \leq b$. Se, no entanto, para todo $M \in \mathbb{N}$, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n| > M$, dizemos que a sequência (s_n) é *ilimitada*.

Exemplo 13.3. A sequência (a_n) definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$ é limitada. Provaremos isso por indução. Para $n = 1$, temos que $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Supondo que $a_{k+1} = (\sqrt{2})^{a_k} < 2$, como

$$a_{k+2} = (\sqrt{2})^{a_{k+1}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{a_k}} \overset{hip.}{<} (\sqrt{2})^2 = 2,$$

temos que $a_n < 2$ para todo n natural. Logo $\sqrt{2} = a_1 < a_n < 2$, para todo n. Segue que (a_n) é limitada.

Exemplo 13.4. Seja $a > 0$ um número real qualquer. Se $r > 1$, a sequência (an^r) é ilimitada. De fato, dado $M > 0$ arbitrariamente grande, tome $n = \lceil M/a \rceil$ e temos $s_n = a\lceil M/a \rceil^r > a\lceil M/a \rceil > aM/a = M$.

O número real L é dito ser o *limite da sequência* (s_n), se dado $\varepsilon > 0$ real arbitrário, existir $N = N(\varepsilon)$ natural para o qual se $n > N$, então $|s_n - L| < \varepsilon$. O que a definição anterior diz é que se você pega índices n muito grandes, então os valores s_n se aproximam de L tanto quanto se deseje, e mais que isso, eles continuam muito perto para "sempre".

Escrevemos $\lim_{n\to\infty} s_n = L$, ou $\lim s_n = L$, ou simplesmente $s_n \to L$, para dizer que L é o limite da sequência s_n. Dizemos que a sequência (s_n) é convergente quando existe o limite $\lim s_n$. Se uma sequência não converge, dizemos que ela diverge.

Exemplo 13.5. Seja a um número real. A sequência constante $s_n = a$ para todo n natural, converge para a. De fato, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, basta tomarmos $N = 1$. Observe que se $n > 1$, temos $|s_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$, e portanto $\lim s_n = a$.

Proposição 4. *Toda sequência convergente é limitada.*

Prova. Seja (s_n) uma sequência convergindo para L. Seja $\varepsilon = 1$. Por definição de limite de sequência, existe N tal que se $n > N$, então $|s_n - L| < 1$, e portanto $s_n \in (L-1, L+1)$. Defina $A = \{s_1, s_2, \ldots, s_N, L-1, L+1\}$. Tome $m = \min A$ e $t = \max A$. Segue que $m \leq s_n \leq t$ para todo n natural, e portanto (s_n) é limitada. □

Provaremos agora que o limite de uma sequência, quando existe, é único.

Teorema 13.1 (Unicidade do Limite)**.** *Se a sequência $(s_n)_n$ converge para o número real L e também para o número real M, então $L = M$.*

Prova. Sejam $\lim s_n = L$ e $\lim s_n = M$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de limite existe $N_1 \in \mathbb{N}$ para o qual $n > N_1 \Rightarrow |s_n - L| < \varepsilon/2$ $(*)$. Analogamente, dado o mesmo ε, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ para o qual $n > N_2 \Rightarrow |s_n - M| < \varepsilon/2$ $(**)$. Defina a sequência auxiliar constante $(A_n)_n$, onde $A_n = L - M$ para todo n natural.

Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$. Seja $n > N$. Por $(*)$ e $(**)$ temos

$$\begin{aligned} |A_n - 0| =&|L - M| = |L - M + s_n - s_n| = |-(s_n - L) + (s_n - M)| \\ \leq&|s_n - L| + |s_n - M| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Acima, usamos o fato que $|x + y| \leq |x| + |y|$ para quaisquer x, y reais. Logo $\lim A_n = 0$. Mas como (A_n) é constante, temos $\lim A_n = L - M$, e portanto $L - M = 0$, i.e, $L = M$. □

Uma *subsequência* da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma restrição de s a um conjunto $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ infinito com $n_i < n_j$ sempre que $i < j$. Escrevemos $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ou $(s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots, s_{n_k}, \ldots)$. Não confunda os índices: quem varia nesse caso é k, e não n.

Proposição 5. *Se uma sequência $(s_n)_n$ converge para L, então toda subsequência $(s_{n_k})_k$ dela converge para L.*

Prova. Seja $\lim s_n = L$ e $(s_{n_k})_k$ uma subsequência de $(s_n)_n$. Pela definição de limite de sequências, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual se $n > N$, então $s_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Em particular, se $n_k > N$, então $s_{n_k} \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, e portanto $\lim s_{n_k} = L$. □

Exemplo 13.6. Considere a sequência $s_n = ((-1)^n)$. Note que $s_{2k-1} = -1$ e $s_{2k} = 1$ para todo k natural. Logo $\lim s_{2k-1} = -1$ e $\lim s_{2k} = 1$, e por isso temos duas subsequências da sequência s_n convergindo para valores distintos. Pela Proposição acima, se (s_n) convergisse, todas as suas subsequências convergiriam pro mesmo limite. Segue, portanto que (s_n) diverge.

Como veremos mais a frente (no Teorema 13.2), para que uma sequência seja convergente, é suficiente que ela seja limitada e monótona. Abaixo segue a definição de monotonicidade de uma sequência de números reais.

Definição 6. Se, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

1. $s_n \leq s_{n+1}$, então (s_n) é monótona não-crescente;

2. $s_n \geq s_{n+1}$, então (s_n) é monótona não-decrescente;

3. $s_n < s_{n+1}$, então (s_n) é monótona decrescente;

4. $s_n > s_{n+1}$, então (s_n) é monótona crescente.

Dizemos que a sequência $(s_n)_n$ é *monótona* se uma das afirmações acima for verdadeira.

Exemplo 13.7. Provaremos por indução que a sequência (a_n) definida no Exemplo 3 é monótona crescente. Para isso, comece notando que $a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$, $a_{n+2} = (\sqrt{2})^{a_{n+1}}$, e portanto $a_{n+2} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{a_n}}$. Note que para $n = 1$, temos $a_2 = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2})} > (\sqrt{2})^1 = \sqrt{2} = a_1$. Suponha que $a_{k+1} = (\sqrt{2})^{a_k} > a_k$. Logo, como

$$a_{k+2} = (\sqrt{2})^{a_{k+1}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{a_k}} \overset{hip.}{>} (\sqrt{2})^{a_k} = a_{k+1},$$

temos a propriedade verificada para $n = k + 2$. Portanto, ela está demonstrada para todo n natural. Concluímos, daí, que ela é monótona crescente.

Seja C um conjunto de números reais. Diremos que o número real c é uma *cota inferior* de C, se para todo $x \in C$, tivermos que $c < x$. Analogamente, d é uma *cota superior* do conjunto C se para todo $x \in C$, tivermos que $x < d$.

Teorema 13.2. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Prova. Suponha que (s_n) seja limitada e monótona não-crescente. Provaremos que $\lim s_n = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ = maior cota inferior do conjunto $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. De fato, chamando $C = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $c = \inf C$, temos que para todo $\varepsilon > 0$ real, $c + \varepsilon$ não pode ser cota inferior de C, uma vez que c é a maior de todas elas. Por isso, deve existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $s_N \in [c, c + \varepsilon)$. Mas como (s_n) é não-crescente, e limitada por baixo por c, temos que $n > N \Rightarrow c \leq s_n \leq s_N < c + \varepsilon$, ou seja, $s_n \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Por definição de limite, segue que $\lim s_n = c$.

De maneira completamente análoga, se (s_n) é monótona não-decrescente, então $\lim s_n = \sup C$ = menor cota superior de C. □

Com todas as ferramentas necessárias em mãos, estamos prontos para enunciar o

Teorema 13.3 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência de números reais limitada possui subsequência convergente.*

A prova do Teorema acima pode ser encontrada em [3], e exige uma leitura atenciosa.

13.2 Propriedades de Limites

Seja P uma propriedade que os termos de uma sequência (s_n) obedecem. Se existir $N \in \mathbb{N}$ para o qual $n > N \Rightarrow s_n$ obedece a propriedade P, diremos que "para todo n suficientemente grande, s_n obedece a propriedade P".

Teorema 13.4 (Teorema do Confronto)**.** *Sejam (r_n), (s_n) e (t_n) sequências tais que $r_n \leq s_n \leq t_n$ para todo n suficientemente grande. Se $r_n \to L$ e $t_n \to L$, então $s_n \to L$.*

Proposição 6. *Se $s_n \to 0$ e t_n é uma sequência limitada, então $\lim(s_n \cdot t_n) = 0$.*

Podemos até mesmo operar com limites (contanto que eles existam), de maneira parecida com a qual operamos com números reais. Segue abaixo uma proposição com algumas dessas operações.

Proposição 7 (Operações com Limites)**.** *Sejam $k \in \mathbb{R}$, s_n, t_n sequências convergentes quaisquer. Então:*

(1.) $\lim(ks_n) = k \lim s_n$;

(2.) $\lim(s_n \pm t_n) = \lim s_n \pm \lim t_n$;

(3.) $\lim(s_n \cdot t_n) = \lim s_n \cdot \lim t_n$;

(4.) $\lim \dfrac{s_n}{t_n} = \dfrac{\lim s_n}{\lim t_n}$, *contanto que* $\lim t_n \neq 0$.

A proposição abaixo será útil para resolução de exercícios, mas sua prova foge do escopo desse texto. Para uma demonstração dela, veja [3].

Proposição 8. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em L e $\lim(s_n) = L$. A sequência $(f(s_n))_n$ converge para $f(L)$.*

Iremos ver agora alguns exemplos de aplicações destas propriedades e operações.

Exemplo 13.8. A sequência $(\sin(n)/n)$ é convergente. De fato, $\sin(n)/n = (1/n)\cdot\sin(n)$, e como $\lim 1/n = 0$ e $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ para todo n natural, pela Proposição 6, temos que $\lim \sin(n)/n = 0$.

Exemplo 13.9. Seja c um número real. O limite da sequência $(c + 1/n)$ é c. Com efeito, pelo item (2.) da Proposição 7, temos que $\lim(c + 1/n) = \lim c + \lim 1/n = c$.

Exemplo 13.10. Seja c um número real e s_n uma sequência convergindo para L. Como $f(x) = c^x$ é uma função contínua, pela Proposição 8, temos que $\lim(c^{s_n})_n = c^L$.

13.3 Problemas Resolvidos

Problema 13.1. Seja r um número inteiro positivo. Sabendo que $\lim(1+1/n)^n = e$ e $(s_n) = ((1+r/n)^n)_n$ é convergente, prove que $\lim(1+r/n)^n = e^r$.

Solução. Tome a subsequência com conjunto de índices $\{r, 2r, 3r, \ldots, kr, \ldots\}$ de (s_n). A saber, estamos tratando da subsequência $(s_{n_k}) = ((1+r/kr)^{kr})$ de s_n.

Calculando o seu limite:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{r}{kr}\right)^{kr} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^r$$
$$\overset{P8}{=} \left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^r = e^r,$$

onde P8 indica que usamos o resultado da Proposição 8 para concluir a igualdade. □

Problema 13.2. Seja (F_n) a Sequência de Fibonnaci, definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Afirmamos que a sequência $(F_{n+1}/F_n)_n$ é convergente. Calcule $\lim F_{n+1}/F_n$.

Solução. Seja $L = \lim(F_{n+1}/F_n)$. Observe que

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

e portanto, multiplicando ambos os lados por $1/F_n$, obtemos:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Daí, operando com o limite:

$$L = \lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim\left(1+\frac{F_{n-1}}{F_n}\right) = 1 + \frac{1}{L},$$

pois $F_{n-1}/F_n = 1/(F_n/F_{n-1})$ e $\lim F_n/F_{n-1} = L$.

O que sobra é a equação $L = 1 + 1/L$, que é equivalente a equação do segundo grau $L^2 - L - 1 = 0$, cujas soluções são $(\sqrt{5}+1)/2$ e $(\sqrt{5}-1)/2$. Note, no entanto, que $F_{n+1} > F_n$ para todo n, e portanto $F_{n+1}/F_n > 1$. Como $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,618 < 1$, a única solução possível é $L = (\sqrt{5}+1)/2$, que o leitor pode verificar ser o limite desejado utilizando a definição. □

Problema 13.3. Considere a sequência $a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$ com $a_1 = \sqrt{2}$.
a) Mostre que a sequência é convergente.
b) Calcule o $\lim a_n$.

Solução. (a) Pelo Exemplo 13.3, sabemos que (a_n) é limitada. Pelo Exemplo 13.7, sabemos que ela é monótona. Segue, pelo Teorema 13.3, que (a_n) é convergente.

(b) Sabemos que (a_n) é convergente pelo item anterior. Seja, portanto $\lim a_n = L$. Pela Proposição 5, $\lim a_{n+1} = L$ e pelo Exemplo 13.10, $\lim(\sqrt{2})^{a_n} = (\sqrt{2})^L$. Mas isso nos diz que $L = (\sqrt{2})^L$. Logo, o problema se reduz a encontrar L que satisfaça a equação anterior. Afirmamos (e sugerimos que o leitor tente provar utilizando técnicas de cálculo diferencial) que $L = 2$ é a única solução em $[\sqrt{2}, 2]$ e portanto $\lim a_n = 2$. □

13.4 Lista de Exercícios

Aquecimento.

Exercício 13.1. Seja (s_n) uma sequência convergente. Prove que $\lim(\log s_n) = \log(\lim s_n)$.

Exercício 13.2. Seja $k > 1$. Seja (s_n) a sequência definida assim: $s_1 = 1$ e $s_{n+1} = (k + s_n)/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim s_n = k$.

Livro do Elon.

Exercício 13.3. Se uma sequência monótona tem uma subsequência convergente, prove que a sequência é, ela própria, convergente.

Exercício 13.4. Se existem $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $\varepsilon \leq x_n \leq n^k$ para todo n suficientemente grande, prove que $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$. Use este fato para calcular $\lim \sqrt[n]{n+k}$, $\lim \sqrt[n]{n + \sqrt{n}}$, $\lim \sqrt[n]{\log n}$ e $\lim \sqrt[n]{n \log n}$.

Olímpicos.

Exercício 13.5 (OBMU-2017)**.** Considere a sequência $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, para $n \geq 1$.

(a) Determine $\lim_n a_n$.

(b) Determine $\lim_n \left(\dfrac{2^n(2 - a_n)}{n+1} \right)^{n+1}$.

Exercício 13.6 (OBM-2021)**.** Um conjunto A de números reais é *enquadrado* quando é limitado e, para todos $a, b \in A$, não necessariamente distintos, $(a-b)^2 \in A$. Qual é o menor número real que pertence a algum conjunto *enquadrado*?

Exercício 13.7 (IMC-2011)**.** Seja $(a_n) \subset (\frac{1}{2}, 1)$. Defina a sequência $x_0 = 0$,

$$x_n = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1} x_n}.$$

Esta sequência é convergente? Se sim, encontre seu limite.

Exercício 13.8 (CIIM-2014)**.** Seja (a_i) uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos. Defina a sequência (s_k) como

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]},$$

onde $[a_i, a_{i+1}]$ é o mínimo múltiplo comum de a_i e a_{i+1}. Mostre que a sequência (s_k) é convergente.

Exercício 13.9 (Flanders-1991)**.**

(a) Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe exatamente um $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^n + x^{n+1} = 1$. Chame tal x de x_n.

(b) Encontre $\lim_n x_n$.

Exercício 13.10 (Bulgária-2002)**.** Seja $(a_n)_n$ uma sequência de números reais que satisfaz a relação de recorrência $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_n - 1}$, para $n \geq 1$. Prove que $a_1 \notin (-2, 1)$.

Referências

[1] Arthur Engel, *Problem-solving strategies*, Nova Iorque: Springer-Verlag New York Inc., 1998.

[2] Art of Problem Solving. AoPS Online, 2022. *Stretch Your Student to Their Fullest Mathematical Potential*. Disponível em: <https://artofproblemsolving.com/online>.

[3] Elon Lages Lima, *Análise real volume 1. Funções de uma variável*, 10.ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

14 Premiados na OAM 2021

14.1 Nível 1

Lista de Premiados OAM 2021 - Nível 1	
NOME	**PRÊMIO**
Laura Torres Lima	OURO
Clarice Berto de Lima	OURO
Paulo Diego Vasconcelos Neves	OURO
Lázaro Vinícius da Silva Renovato	OURO
Vinícius Lopes Ramos	OURO
Kawany Vitória Moreira de Oliveira	OURO
Felipe Gabriel Vitório Paiva	PRATA
Maria Luiza Nepomuceno Moreira	PRATA
Mariana Lins dos Santos	PRATA
Sarah da Silva Ramalho	PRATA
Andre Adalberto Lins Santos	PRATA
Antonio Jorge Valente De Oliveira	PRATA
Charlie Ethan dos Santos Ugá Luna	PRATA
Claudia Manuelly Soares Santos	PRATA
Daniel Menezes Nascimento	PRATA
Davi Wéverton pereira da Silva	PRATA
Gleyce dos Reis Carvalho	PRATA
Maria Fernanda Alécio Toledo Tenório	PRATA
Sofia Vitória Gonzaga da Silva	PRATA
Tiago Vinícius Monteiro Lima	PRATA
Rafael Henrique Costa Paranhos	BRONZE
Jonatha Muniz Leite Dos Santos	BRONZE
José Pereira Mendes Neto	BRONZE
Alexia Pyetra Ferro da Rocha	BRONZE
Augusto César de Oliveira Silva	BRONZE
Camila Ferreira de Araujo Andrade	BRONZE
Daniel Da Silva Rodrigues	BRONZE
Davi Luiz Pacheco Gomes Lessa	BRONZE
Guilherme Soares dos Santos Araújo	BRONZE
Isac Vinícius Xavier Maciel Rocha	BRONZE
Lucas Lima Belchior	BRONZE
Miguel Augusto Silva De Oliveira	BRONZE
Pedro Paulo Rosa Ribeiro Barbosa	BRONZE
Rickemberg Araújo Silva	BRONZE

David Leite dos Santos	MENÇÃO HONROSA
Dayane Maria Vieira de lima	MENÇÃO HONROSA
Lucas Emanuel Borges de Oliveira	MENÇÃO HONROSA
Alehxia Hadassah Nunes de Oliveira	MENÇÃO HONROSA
Alejandro Ferreira De Souza	MENÇÃO HONROSA
Ana Julya Siqueira De Mendonça	MENÇÃO HONROSA
Arthur Quintiliano Macário	MENÇÃO HONROSA
Arthur Victor da Silva Santos	MENÇÃO HONROSA
Aycha da Silva de Vasconcelos	MENÇÃO HONROSA
Caio Omena de Holanda Santos	MENÇÃO HONROSA
Carlos Eduardo Gomes dos Santos	MENÇÃO HONROSA
Gabriel Cordeiro Calheiros	MENÇÃO HONROSA
Gabriel Vinicius Morais Silva	MENÇÃO HONROSA
Guilherme Roque Pilar dos Santos	MENÇÃO HONROSA
Hevelin Karolayne Teles Souza Caldas Tenório	MENÇÃO HONROSA
Isabella Barauna da Silva	MENÇÃO HONROSA
Janderlyer Marley da Silva Santos	MENÇÃO HONROSA
João Vitor Da Silva Gouveia Ferreira	MENÇÃO HONROSA
Júlia Melissa dos Santos Lima	MENÇÃO HONROSA
Lucas Lima de Oliveira Silva	MENÇÃO HONROSA
Maria Clara Alves Vital	MENÇÃO HONROSA
Maria Ranyelle dos Santos Silva	MENÇÃO HONROSA
Michelle Barbosa De Lima Da Silva	MENÇÃO HONROSA
Milena Micaelle De Souza Santos	MENÇÃO HONROSA
Paulo Vitor Da Silva Oliveira	MENÇÃO HONROSA
Pedro Vitor Gonzaga da Silva	MENÇÃO HONROSA
Rayka Marques Silva	MENÇÃO HONROSA
Sergio Reis dos Santos Filho	MENÇÃO HONROSA
Willian Gabriel Lopes Da Silva	MENÇÃO HONROSA
Yago Felisdoro de Melo	MENÇÃO HONROSA

14.2 Nível 2

Lista de Premiados OAM 2021 - Nível 2	
NOME	**PRÊMIO**
Mateus Amorim Sibaldo Pergentino Vieira	OURO ESPECIAL
Alexandre Cavalcante Seabra	OURO
Alice Rabello Oliveira	OURO
José Gabriel Juvino Santos	OURO
Luis Vinicius Rodrigues Santos	OURO
Luiz Antônio Alves de Lima	OURO
Mayara Lins dos Santos	OURO
Pedro Henrique Monteiro Lima	OURO
Clara Maria Cardoso Wagner	PRATA
Clara Moura Galvão Ferreira	PRATA
Emanuel Felix Monteiro	PRATA
Pedro Henrique Vasconcelos Neves	PRATA
William Gabriel Ferreira da Silva	PRATA
Rita Beatriz Melo Lacerda	PRATA
Amon Chalegre Gomes Vanderlei	PRATA
Gabriel Guttenberg Brêda Rodrigues	PRATA
Guilherme Gomes Carvalho	PRATA
Maria Kayllane Vasconcelos Cavalcanti	PRATA
Nycolas Silva de Almeida	PRATA
Israel Libnis Pinheiro Silva	PRATA
Anna Júlia Rocha Santos	PRATA
Ian Muniz Ferro	PRATA
Lara Costa Tavares Magalhães	PRATA
Maria Luiza Cavalcante de Carvalho	PRATA
Mariana Paulino dos Santos	BRONZE
Ricardo Benjamim Salmos Bessa	BRONZE
Rômulo dos Santos Gois	BRONZE
Vinícius Cavalcante De Albuquerque	BRONZE
Ismael Adson Samuel de Lemos Santos	BRONZE
Bernardo Khalili Lages	BRONZE
Cláudio Matheus Anselmo Soares Santos	BRONZE
Eduardo Matheus da Silva Barrozo	BRONZE
Eliza Bezerra Bastos	BRONZE
Esther Menezes Nascimento	BRONZE

Felipe Protázio Mendes de Amorim	BRONZE
Iuri Paulo Bittencourt Marques Pinto	BRONZE
Laura Lis Nascimento Farias	BRONZE
Nyckollas Raphaell Nogueira Ribeiro	BRONZE
Riazla de Andrade Oliveira	BRONZE
Wesley Ezequiel Sá de Oliveira	BRONZE
Agnnos Nobre Barbosa Maciel	BRONZE
Ana Clara Sousa Magalhães	BRONZE
Bruno Chaves Malheiros de Mello	BRONZE
Carine Cruz de Araujo Delfino	BRONZE
Gabriella Santos Lins	BRONZE
Gleyciane Kelly Castro dos Santos	BRONZE
Ian Normande Vaz	BRONZE
Joao Matheus Ferreira da Rocha	BRONZE
Kallyne Victórya Gomes dos Santos	BRONZE
Layla Carollini Izidoro Cerqueira	BRONZE
Marcelly Jammylly Oliveira Pinheiro	BRONZE
Maria Amanda Lima da Silva	BRONZE
Maria Clara Lima Dos Santos	BRONZE
Samara Naely dos Passos Pimentel	BRONZE
Samuel Sousa de Andrade	BRONZE
Sofia Lima da Trindade	BRONZE
Tharcysio Thiogenes de Mendonça Silva	BRONZE
Weliza Maysa da Silva Santos	BRONZE
Pamella Gabrielly Batista da Silva	MENÇÃO HONROSA
Isadora Regina dos Santos Cassiano	MENÇÃO HONROSA
Adriano Lopes da Silva Filho	MENÇÃO HONROSA
Alef Daniel Almeida Silva	MENÇÃO HONROSA
Brenda Vitória dos Santos Meireles	MENÇÃO HONROSA
Bruna Oliveira dos Santos	MENÇÃO HONROSA
Caio Vítor Leite Gomes	MENÇÃO HONROSA
Celeste Maria De Almeida Lima	MENÇÃO HONROSA
Douglas Silva Freitas Leite	MENÇÃO HONROSA
Ellen Sarah Cavalcante Freitas	MENÇÃO HONROSA
Emylly Vitoria Gomes Dos Santos	MENÇÃO HONROSA
Erika Rannielly Vieira da Silva Borges	MENÇÃO HONROSA

Erike Maicon Da Silva Lima	MENÇÃO HONROSA
Esther Nunes Pinheiro	MENÇÃO HONROSA
Gabriel Dos Santos Silva	MENÇÃO HONROSA
Gabriel Vasconcelos da Silveira	MENÇÃO HONROSA
George Bruno Araújo Albuquerque	MENÇÃO HONROSA
Jenyphyr Carollynny de Almeida Mendes	MENÇÃO HONROSA
João Gabriel Lima Rodrigues	MENÇÃO HONROSA
Lara Beatriz Nunes Barbosa	MENÇÃO HONROSA
Lauana Silva Fontes	MENÇÃO HONROSA
Letícia Pereira Ferro	MENÇÃO HONROSA
Letícia Vitória Santos da Silva	MENÇÃO HONROSA
Maria Júlia da Silva Santos	MENÇÃO HONROSA
Maria Luíza de Mendonça Fragoso Travassos	MENÇÃO HONROSA
Mayra Raíssa Silva Dias	MENÇÃO HONROSA
Miguel Melo Ferreira de Souza	MENÇÃO HONROSA
Nataly Viana dos Santos Correia	MENÇÃO HONROSA
Ryann Calaça Felix da Silva	MENÇÃO HONROSA
Sarah Liege Omena Cidrim	MENÇÃO HONROSA
Saskya Queiroz Silva	MENÇÃO HONROSA
Sidney Miguel da Silva	MENÇÃO HONROSA
Victor Lucas Silva de Souza	MENÇÃO HONROSA

14.3 Nível 3

Lista de Premiados OAM 2021 - Nível 3	
NOME	**PRÊMIO**
João Rafael Silva de Azevedo	OURO
Victor Umbelino Barbosa	PRATA
Jeann da Rocha Silva	PRATA
Clark Oliveira Santana Conce Rocha	BRONZE
Lukas Cavalcante Correia	BRONZE
Raíssa Mariângela dos Santos	BRONZE
Welbert da Silva Freitas Filho	BRONZE
Edeilson Costa de Azevedo	BRONZE
Jessyckon Peterson Farias da Costa	BRONZE
Matheus Henrique Bezerra Nunes	BRONZE
Eduardo Matheus da Silva Barrozo	BRONZE
Eliza Bezerra Bastos	BRONZE
Esther Menezes Nascimento	BRONZE
Jaime Willian Carneiro da Silva	MENÇÃO HONROSA
Lucas Lauhan do Nascimento Lessa	MENÇÃO HONROSA
Matheus Homrich	MENÇÃO HONROSA
Aledson Sampaio Moura	MENÇÃO HONROSA
Allane Karine Ferreira da Silva	MENÇÃO HONROSA
Álvaro Dionísio de Lira Silva	MENÇÃO HONROSA
Arthur Rabello Oliveira	MENÇÃO HONROSA
Cindhy Glaucielle de Lima Rodrigues	MENÇÃO HONROSA
Guilherme Fonseca Trapp	MENÇÃO HONROSA
Izabel Maria Vicente da Silva	MENÇÃO HONROSA
João Guilherme Nascimento Vieira	MENÇÃO HONROSA
João Paulo Barbosa Nunes	MENÇÃO HONROSA
Jonatha Menezes Felisdoro	MENÇÃO HONROSA
Julia de Almeida Cabral Candiago	MENÇÃO HONROSA
Juliana Jacksiana da Silva	MENÇÃO HONROSA
Luan Marinho da Silva Teixeira	MENÇÃO HONROSA
Luana Marina Santos Ferro	MENÇÃO HONROSA
Luiz Otávio Vieira Bento	MENÇÃO HONROSA
Natália Oliveira Araújo	MENÇÃO HONROSA
Vinícius Santana Martins	MENÇÃO HONROSA
Vitor Gabriel Rodrigues de Oliveira	MENÇÃO HONROSA

Vivian Beatriz Galdino dos Santos	MENÇÃO HONROSA
Mikaelly dos Santos Silva	MENÇÃO HONROSA
Agnaldo Campos Matos Neto	MENÇÃO HONROSA
Davi Lucas Rodrigues de Araújo	MENÇÃO HONROSA
Elenilton Inarcio da Silva Júnior	MENÇÃO HONROSA
Luan Gabriel Barros de Oliveira	MENÇÃO HONROSA
Luiz Edson Neves Gomes Neto	MENÇÃO HONROSA
Maria Clara de Oliveira Corcino dos Santos	MENÇÃO HONROSA
Maria Eduarda Lins	MENÇÃO HONROSA
Sara Lícia Batista Cândido dos Santos	MENÇÃO HONROSA

14.4 Nível U

Lista de Premiados OAM 2021 - Nível UNIVERSITÁRIO	
NOME	**PRÊMIO**
Gabriel Fernando Santos de Oliveira	OURO ESPECIAL
Jônatas Marinho Santos Júnior	OURO
Francisco Alan Lima da Silva	PRATA
Marina Sofia de Albuquerque Oliveira	PRATA
Samuel Nascimento Figuerdo	PRATA
Lucas Brunno Luna de Araújo Barbosa	BRONZE
Lucas Hiroshi dos Santos Nakagawa	BRONZE
Anamilla Barbosa de Sousa	MENÇÃO HONROSA
Gerson Ferreira Santos Junior	MENÇÃO HONROSA
Marcos Antônio da Silva Araújo	MENÇÃO HONROSA

15 Como contribuir com a ROAM

A Revista da OAM visa levar conhecimentos de matemática olímpica para estudantes de Alagoas. Essa missão não é unicamente nossa. Você pode fazer parte dessa missão, colaborando com a continuidade do nosso trabalho.

A seguir listamos diversas formas de contribuir na construção da revista:

1. Digitar em latex as provas antigas da OAM;
2. Digitar em latex as soluções das provas antigas da OAM;
3. Enviar os PDFs de provas antigas que ainda não foram encontradas.

Para demais esclarecimentos, envie um email para `roam.ufal@gmail.com`.

16 Agradecimentos

A organização da ROAM agradece à Stone, à AOBM e à OAM pelo financiamento da versão impressa da revista.

ROAM
Vol. 1

Apoio

Associação Olimpíada Brasileira de Matemática

stone